

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
ხელნაწერის უფლებით

ლიანა ქვარცხავა

თერმოელექტროდრეკადობის თეორიის ზოგიერთი
სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების მათემატიკური
მოდელირება ფილებისათვის

სადოქტორო პროგრამა მშენებლობა

შიფრი 0732

დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

წარდგენილი დისერტაციის

ა ვ ტ ო რ ე ფ ე რ ა ტ ი

თბილისი

2022 წელი

სამუშაო შესრულებულია საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში
სამშენებლო ფაკულტეტი
საინჟინრო მექანიკისა და სამშენებლო ტექნიკური ექსპერტიზის №101
დეპარტამენტი

ხელმძღვანელი: პროფესორი დავით გორგიძე
პროფესორი თამაზ ბაციკაძე

რეცენზენტები:

პროფესორი..... მურმან კუბლაშვილი
აკადემიური დოქტორი..... ნათელა ზირაქაშვილი

დაცვა შედგება 2022 წლის ” 6 ” დეკემბერს, 13 საათზე საქართველოს
ტექნიკური უნივერსიტეტის სამშენებლო ფაკულტეტის სადისერტაციო
ნაშრომის დაცვის კოლეგიის სხდომაზე,
კორპუსი I, აუდიტორია 508
მისამართი: 0160, თბილისი, კოსტავას 77.
დისერტაციის გაცნობა შეიძლება სტუ-ის ბიბლიოთეკაში,
ხოლო ავტორეფერატისა - ფაკულტეტის ვებგვერდზე

ფაკულტეტის სწავლული
მდივანი პროფესორი

დ. ტაბატაძე

შესავალი

კვლევის ობიექტი და საგანი. კვლევის ობიექტია სხვადასხვა გეომეტრიული ფორმის ფილები, ხოლო საგანი – ამ ფილების დამაბული-დეფორმირებული მდგომარეობის მათემატიკური მოდელირება.

თემის აქტუალობა. რთული საინჟინრო ნაგებობების საიმედოობის და უსაფრთხოების უზრუნველყოფა მშენებლობისას (რეკონსტრუქციის) და მზიდი კონსტრუქციების ტექნიკური მდგომარეობის, კერძოდ დამაბული-დეფორმირებული მდგომარეობის მონიტორინგი, როგორც მშენებლობის ასევე ექსპლუატაციის დროს მნიშვნელოვანი კომპონენტია.

მიუხედავად იმისა, რომ როგორც წესი შენობებისა და ნაგებობების მონიტორინგის აუცილებლობა განსაზღვრულია მხოლოდ უნიკალური ნაგებობებისთვის, ამიტომ მიზანშეწონილია ასეთი სისტემებით ჩვეულებრივი ნაგებობების აღჭურვა.

მონიტორინგის მიზანია გრძელვადიანი პერიოდული კონტროლი დატვირთვების, ზემოქმედების, ძალების, გადაადგილებების, კონსტრუქციის დეფორმაციის, კვეთებში ძაბვების; კონსტრუქციის რეალური დამაბული-დეფორმირებული მდგომარეობის შედარება სამუშაო პროექტის გაანგარიშებებთან, ობიექტის ტექნიკური მდგომარეობის შესაფასებლად და კრიტიკული და წინა საავარიო მდგომარეობის წინმსწრები გამოვლენა.

ამგვარად, შენობების მშენებლობის და ექსპლუატაციის უსაფრთხოების უზრუნველყოფის ტექნიკური საფუძველია კონტროლისა და დიაგნოსტიკის საშუალებების დანერგვა. შესრულებული სამეცნიერო კვლევების და ტექნიკური გადაწყვეტილებების დონის შეფასება გვარწმუნებს, რომ დღევანდელ დღეს ახალი თაობის გამზომი სისტემები სამშენებლო ნაგებობებისა და კონსტრუქციების მრავალფუნქციური კონტროლის საიმედო ორგანიზების საშუალებას იძლევა.

კონტროლის მაღალი სიზუსტის მისაღწევად, სხვა გადამწოდებებთან შედარებით ყველაზე მეტი, ეფექტურობით გამოირჩევა პიეზოკერამიკული გადამწოდებები.

კონსტრუქციების კვლევისთვის და მოწყობილობებში სტატიკური და სტაციონარული დაძაბული-დეფორმირებული მდგომარეობის შესასწავლად ფართოდ გამოიყენება წრფივი დრეკადი და თერმოელექტროდრეკადი სასრული ზომის სხეულის მოდელი.

მასალათამცოდნეობასა და მის ტექნიკურ გამოყენებაში ერთ-ერთ ყველაზე მნიშვნელოვან მიმართულებას წარმოადგენს თერმოელექტრულად აქტიური მასალების შექმნა და გამოყენება.

თერმოელექტრულად აქტიური მასალა თანამედროვე პიეზოტექნიკის საფუძველს წარმოადგენს და სულ უფრო და უფრო გამოიყენება მიკრო და ნანოტექნოლოგიებში.

ამ მასალის სამრეწველო გამოყენება მოიცავს სხვადასხვა ტიპის პიეზოელექტრულ, პიროელექტრულ და სხვა სახის გადამწოდებებს, როგორებიცაა ჰიდროაკუსტიკა, დონის კონტროლი, მოძრაობის პარამეტრები, შენობების დაცვა, მშენებლობის კონტროლი და ა.შ.

პიეზოელექტრული მოწყობილობების ფუნქციონირება, ასევე მათი კონსტრუირება წარმოშობს ამ მასალებისათვის თერმოელექტროდრეკადობის დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის განსაზღვრის ამოცანას.

პიეზოელემენტების პრაქტიკული გამოყენების საკითხები მრავალნაირად იყო გამოკვლეული და ძირითადად პიეზოელექტრიკებში პროცესების გამოსაკვლევად გამარტივებულ მიდგომებს ეყრდნობოდა. თუმცა უნდა აღინიშნოს, რომ თეორიული კვლევისა და შესწავლის პროცესში გამოჩნდა მჭიდრო კავშირი გამოყენებითი ინჟინრული ამოცანების ამოხსნასთან. ვითარდებოდა მათემატიკური მეთოდებიც პიეზოელემენტში პროცესების ანალიზისათვის, რომელიც დაფუძნებულია თერმოელექტროდრეკადობის თეორიის ძირითად დებულებებზე.

დამუშავდა პიეზოელექტრული მასალისაგან დამზადებული ფირფიტების და გარსების ტექნიკური თეორიის სხვადასხვა ვარიანტები.

ამ მიმართულებით არსებული ეფექტური კვლევები შესაძლებელია არსებითად გაუმჯობესდეს დრეკადობის და თერმოელექტროდრეკადობის სასაზღვრო და საკონტაქტო ამოცანების ამოხსნების ახალი მეთოდების დამუშავების, და მათემატიკური მოდელირების ახალი თანამედროვე მეთოდების გამოყენების შედეგად, ასევე ახალი პროგრამული კომპლექტების შექმნა და მათი დახმარებით რიცხვითი ექსპერიმენტების ჩატარება, მნიშვნელოვნად ცვლის და აიაფებს ძვირადღირებულ ნატურალურ ექსპერიმენტებს.

სასრული ზომის სხეულებისათვის პირდაპირი და შებრუნებული ამოცანების ამოხსნის მეთოდებს შორის სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებების კლასიკურმა მეთოდმა და მასზე დაფუძნებულმა სასაზღვრო ელემენტების მეთოდის გამოყენებამ, სასურველ შედეგებამდე მიგვიყვანა იზოტროპიული სხეულებისათვის სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნისას დრეკადობის თეორიაში. თუმცა უფრო რთული გარემოსათვის ფუნდამენტალური ამოხსნების მიღება გარკვეულ სიძნელეებს აწყდება. ამ სიძნელეების დასაძლევად საჭიროა ახალი, ალტერნატიული მეთოდების დამუშავება, რაც ამჟამად წარმოადგენს აქტუალურ ამოცანას.

რეალური კონსტრუქციებისთვის სასაზღვრო ინტეგრალურ მეთოდთან ერთად გამოიყენება სასრულ ელემენტთა მეთოდი. ამჟამად უცხოეთში არსებობს მთელი რიგი ასეთი სასრული ელემენტების კომპლექსები, მაგრამ მათი სრული ლიცენზირებული ვერსია იმდენად ძვირია, რომ პრაქტიკულად მიუწვდომელია რიგითი მკვლევარებისათვის.

ამის გამო ასეთი კლასის ამოცანებისათვის ახალი მათემატიკური მოდელის აგება და მისი კვლევა წარმოადგენს საკმაოდ აქტუალურ ამოცანას, რომელსაც განსაკუთრებული ყურადღება აქვს დათმობილი თანამედროვე სამეცნიერო ლიტერატურაში.

ამ მოსაზრებებმა განსაზღვრა სადისერტაციო თემის აქტუალობა და წინამდებარე ნაშრომშიც განხილულია შესაბამისი ამოცანები.

ნაშრომის მიზანი. სადისერტაციო ნაშრომის მიზანს წარმოადგენს დრეკადი ტრანსვერსალური იზოტროპული ერთგვაროვანი ფილებისათვის სასაზღვრო და საკონტაქტო ამოცანების ანალიზური ამონახსნების მიღება. ასევე გადამწყვეტი განტოლებების მიღება და ანალიზი. ფილის დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის მათემატიკური მოდელის აგება და მისი მთლიანი კვლევა. მათემატიკურ მოდელი არის კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა, რომელიც შესაბამისი სასაზღვრო და საკონტაქტო პირობებთან ერთად აღწერს სივრცითი ფილის თერმოელექტროდრეკად წონასწორობას.

სამეცნიერო სიახლე. სადისერტაციო ნაშრომის მეცნიერული სიახლეს წარმოადგენს:

- ფილის დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის მათემატიკური მოდელირება;
- მიღებული რეგულარული განტოლებების ანალიზი;
- დეკარტის მართკუთხა და ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში სივრცითი ამოცანების ზუსტი ამონახსნების მიღება.
- გეგმაში მართკუთხა ერთგვაროვანი ფილისათვის რიცხვითი რეალიზაციის ალგორითმი.

კვლევის მეთოდები დაფუძნებულია ნ. ხომასურიძის იდეებზე და ფურიეს მეთოდის გამოყენებაზე დრეკადობის თეორიის, თერმოელექტროდრეკადობის და ელექტროდრეკადობის თეორიის სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანებისთვის.

სანდობა. სადისერტაციო ნაშრომი დაფუძნებულია დრეკადობის თეორიის, თერმოელექტროდრეკადობის და ელექტროდრეკადობის მკაცრ მათემატიკურ აპარატზე; საკვლევი სასაზღვრო და საკონტაქტო ამოცანების კორექტულ დაყვანას მოდიფიცირებულ ამოცანებზე, შედარებით ანალიზზე.

ნაშრომის პრაქტიკული მნიშვნელობა. მიღებული შედეგების პრაქტიკული მნიშვნელობა მდგომარეობს დრეკადობის თეორიის და თერმოელექტროდრეკადობის თეორიის ახალი მათემატიკური მოდელების აგებაში და ანალიზური ამონახსნების მიღებაში. სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების ამოხსნის ალგორითმის დამუშავებაში და რიცხვით რეალიზაციაში.

დაცვაზე გასატანი ძირითადი დებულებები:

- 1) თერმოელექტროდრეკადობის თეორიის ძირითადი კლასიკური განტოლებების დაყვანა მოდიფიცირებულ განტოლებებზე;
- 2) კლასიკური და მოდიფიცირებული სასაზღვრო პირობების ეკვივალენტობა;
- 3) სასაზღვრო ამოცანების ანალიზური ამონახსნების აგება;
- 4) რიცხვითი რეალიზაციისათვის ალგორითმის დამუშავება;

ნაშრომის აპრობაცია. ნაშრომის ძირითადი შედეგები განხილული იყო საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სემინარებზე და საერთაშორისო სიმპოზიუმზე. კერძოდ,

1. საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია. გამოყენებითი ფიზიკის აქტუალური საკითხები. საქართველო, თბილისი, 30 მარტი, 2011.

Д.А.Горгидзе, Л.Г.Кварцхава. Об одной задаче электроупругости для пьезокерамической толстой плиты.

2. საქართველოს მექანიკოსთა კავშირის მეორე ყოველწლიური კონფერენცია. საქართველო, თბილისი, 15-17 დეკემბერი, 2011; 16 იანვარი, 2012.

ზ. სირაძე, დ.გორგიძე, ლ.ქვარცხავა. ელექტროდრეკადობის თეორიის დერძსიმეტრიული ამოცანა ცილინდრისათვის.

3. სტუდენტთა 84-ე საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია. საქართველო, თბილისი, 6 ივნისი-25 ივნისი, 2016.

ლ. ქვარცხავა. სასაზღვრო ამოცანა ელექტროდით დაფარული სასრული ცილინდრული სხეულისათვის.

4. სტუდენტთა 85-ე საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია. საქართველო, თბილისი, 12 ივნისი-1 ივლისი, 2017.

ლ.ქვარცხავა. ცილინდრული პანელის ელექტროდრეკადი წონასწორობა.

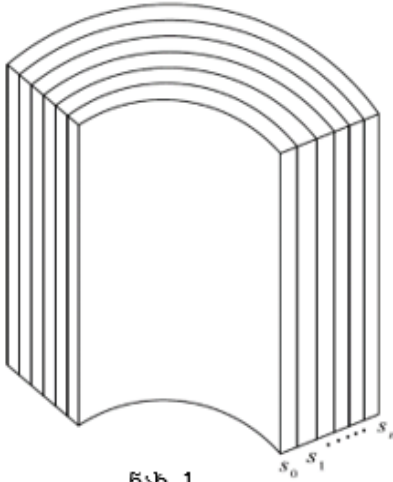
დისერტაციის შესავალში წარმოდგენილია ნაშრომის მიზანი, დასაბუთებულია განსახილველი ამოცანების აქტუალობა, მოცემულია ნაშრომის სტრუქტურა და ძირითადი ნაწილების მოკლე შინაარსი.

განვიხილოთ სადისერტაციო ნაშრომი თავების მიხედვით.

პირველ თავის პირველ პარაგრაფში მოცემულია იმ ნაშრომთა კრიტიკული ანალიზი, რომლებიც უშუალოდაა დაკავშირებული დისერტაციაში განხილულ საკითხებთან. ამავე თავის მეორე პარაგრაფში განზოგადოებულ ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში განხილულია ფილის თერმოელექტროდრეკადი წონასწორობა. დრეკადი სხეული არის ტრანსვერსალურად იზოტროპული (ტრანსტროპული სიმეტრიის სიბრტყედ მიღებულია $z_i = const$ სიბრტყეები). ფილის პარალელუპიპედის ზედა და ქვედა ფუძეებზე ($z = 0$ და $z = z_1$ სიბრტყეებზე) ტემპერატურულ და ელექტრულ ველთან ერთად მოცემულია ან ძაბვები, ან გადაადგილებები, ან მათი კომბინაცია. ფილის გვერდით ($\rho = \rho_0, \rho = \rho_1, \alpha = \alpha_0, \alpha = \alpha_1$) ზედაპირებზე კი მოცემულია სიმეტრიული ან ანტისიმეტრიული გაგრძელების პირობები. ფენოვანი ფილებისათვის ფენებს შორის კონტაქტი ხდება $z = const$ სიბრტყეების გასწვრივ. ასევე, შესაძლებელია განხილული იყოს შემთხვევა, როდესაც ფილის ($\rho = \rho_0, \rho = \rho_1$) ზედაპირებზე ტემპერატურული და ელექტრული ველთან ერთად მოცემულია ან ძაბვები, ან გადაადგილებები, ან მათი კომბინაცია. გვერდით ზედაპირებზე კი მოცემულია მესამე ან მეოთხე სასაზღვრო ამოცანის შესაბამისი ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობები. დარჩენილ ზედაპირებზე კი მოცემულია სიმეტრიული ან ანტისიმეტრიული გაგრძელების პირობები. ამ შემთხვევაში, მრავალფენიანი ფილისათვის კონტაქტი ხდება $\rho = const$ ზედაპირების გასწვრივ (ნახ. 1).

თითოეული ფენა შესაძლებელია იყოს როგორც ტრანსტროპული, ასევე იზოტროპული.

$$K = c_1 \left[\frac{\partial (H u)}{\partial \rho} + \frac{\partial (H v)}{\partial \alpha} \right] + c_3 \frac{\partial w}{\partial z} + e_1 \frac{\partial \phi}{\partial z} - \beta_{10} T$$



ნახ. 1

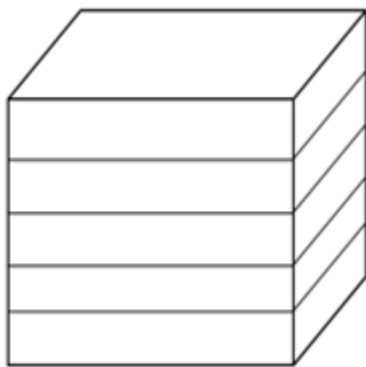
და

$$B = c_5 \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial (H v)}{\partial \rho} - \frac{\partial (H u)}{\partial \alpha} \right]$$

ფუნქციების საშუალებით წონასწორობის განტოლებათა სისტემიდან მიიღება მოდიფიცირებული სისტემა, რომელიც ფიზიკურ განტოლებებთან ერთად ქმნის თერმოელექტროდრეკადი ველის განმსაზღვრელ განტოლებათა სისტემას.

თერმოელექტროდრეკადი ველის ყველა კომპონენტი გამოსახულია u, v, w, ϕ, T, K, B სიდიდეების საშუალებით.

მეორე თავი მთლიანად ეძღვნება გეგმაში მართკუთხა ფილის თერმოელექტროდრეკად წონასწორობას. პირველ პარაგრაფში მიღებულია ძირითადი განტოლებები, განსაზღვრულია სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების ის კლასი, რომელიც დამუშავებულია ამ თავში.



ნახ. 2

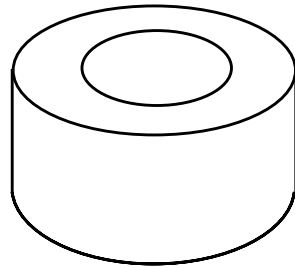
მიღებულია ზოგადი ამონახსნები დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში. ჩამოყალიბებულია რეგულარული ამოხსნის განსაზღვრება. მეორე პარაგრაფში ამოხსნილია სასაზღვრო ამოცანა სქელი მართკუთხა ფილისათვის, ხოლო მესამე პარაგრაფში განხილულია ელექტროდრეკადი წონასწორობა გეგმაში

მართკუთხა ფილისათვის.

მესამე თავში ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში $r, \alpha, z (0 \leq r < \infty, 0 < \alpha < 2\pi, -\infty < z < \infty)$ განიხილება წრიული ცილინდრული ფილის თერმოელექტროდრეკადი წონასწორობა. უფრო ზუსტად,

ყალიბდება აღნიშნული თერმოელექტროდრეკადობის წონასწორობის სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანები, როგორც თერმოელექტროდრეკადობის არაორდინალური ამოცანების მათემატიკური მოდელი. არაორდინალურობა გამოწვეულია, ფილის მასალის და სასაზღვრო თუ საკონტაქტო პირობების უჩვეულობით, რადგან გადაადგილების ვექტორის განსაზღვრის არე შეიძლება იყოს მთლიანი ცილინდრული ფილა (ხშირად ამბობენ ცილინდრული სარტყელი), ე.ი.

$$\Omega = (r_0 \leq r < r_1, 0 \leq \alpha < 2\pi, 0 < z < z_1)$$



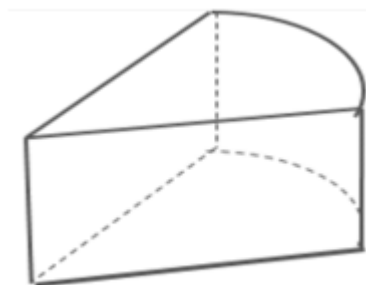
ნახ. 3. ცილინდრული სარტყელი

ცილინდრული ფილა ჭრილით (ნახ.4), ე.ი.

$$\Omega = (r_0 \leq r < r_1, 0 \leq \alpha < \alpha_1 < 2\pi, 0 < z < z_1),$$



ნახ. 4. ცილინდრული ფილა ჭრილით



ნახ.5. სოლისებური ფილა

სოლისებური ფილა (ნახ.5) $\Omega = (0 \leq r < r_1, 0 \leq \alpha < \alpha_1, 0 < z < z_1)$,

ცილინდრული სარტყელი ჭრილით (ნახ. 6) და ა.შ., ხოლო თავად ფილა ან ტრანსტროპული, ან სუსტად ტრანსტროპული მასალისაა. აღნიშნული ფილების $z = const$ ზედაპირზე შეიძლება სრულდებოდეს ოთხი ძირითადი სასაზღვრო პირობა. $r = const$ ზედაპირებზე:

$$u = 0, \tau_{zr} = 0, B = 0, D_r = 0, \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \text{ ან}$$

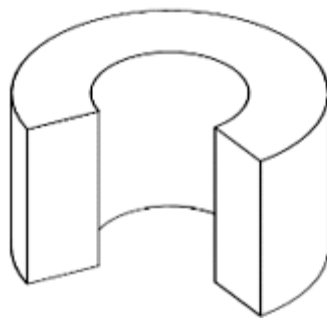
$$v^k = 0, w^k = 0, \tilde{K}^k = 0, \phi^k = 0, T^k = 0;$$

სიმეტრიის, ან

$$v^k = 0, S_{zr}^k = 0, S_{z\alpha}^k = 0, D_r^k = 0, \frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0, \text{ ან}$$

$$N_\alpha^k = 0, u^k = 0, w^k = 0, T^k = 0, \phi^k = 0 \quad (k=0, \dots, 1)$$

ანტისიმეტრიის პირობებია მოცემული. ამასთან u, v, w გადაადგილების ვექტორის კომპონენტებია, სათანადოდ r -ის, α -სადმი მხების და z -ის გასწვრივ. $N_r, N_\alpha, N_z, S_{r\alpha}, S_{rz}, S_{az}$ - შესაბამისად ნორმალური და მხები ძაბვებია; აღვნიშნოთ, რომ $r = const$ ზედაპირზე მოცემული პირობები ანალოგიურია, სათანადოდ, სიმეტრიის და ანტისიმეტრიის პირობების შესაბამისად.



ნახ. 6. ცილინდრული სარტყელი ჭრილით

ნაშრომში განხილული თერმოელექტროდრეკადობის თეორიის სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანათა კლასისათვის მიღებული ზოგადი ამონახსნის და ცვლადთა განცალების მეთოდის გამოყენებით ზემოთ აღნიშნული ამოცანების ამოსახსნელად ვიღებთ

ალგებრულ განტოლებათა სისტემას საძიებელი კოეფიციენტებისათვის. ალგებრული განტოლების სისტემიდან უცნობი კოეფიციენტების განსაზღვრის შემდეგ, გადაადგილების ვექტორის და ძაბვის ვექტორის კომპონენტები გამოისახებიან ექსპონენციალურად კრებადი მწკრივების საშუალებით. მწკრივების შესაკრებები წარმოადგენენ ექსპონენციალურ (z -ის მიმართ), ტრიგონომეტრიულ (α - ის მიმართ) და ბესელის (r - ის მიმართ) ფუნქციების ნამრავლს.

დასკვნაში მოყვანილია ნაშრომის ძირითადი შედეგები.

განვიხილოთ დეკარტის მართკუთხა $Oxyz$ კოორდინატა სისტემაში პიეზოკერამიკული ფილა, რომელსაც უკავია არე

$$\Omega = \{0 < x < x_1, 0 < y < y_1, 0 < z < z_1\},$$

იზოტროპიის სიბრტყეა $z = const$ სიბრტყე. თუ ფილა მრავალფენიანია, მაშინ საკონტაქტო ზედაპირებია $z = const$ სიბრტყეები. ფილაზე მოქმედებს სტაციონარული ტემპერატურული ველი და ელექტრული ველი, ასევე ზედაპირული გარე შემფოთებები. მოცულობითი ძალები უგულებელყოფილია. თუ გავითვალისწინებთ, რომ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატა სისტემაში ლამეს კოეფიციენტები $H_x = 1, H_y = 1, H_z = 1$, მაშინ თერმოელექტროდრეკადობის ძირითად განტოლებებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} a) \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial z} = 0, \\ b) \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial S_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial S_{yx}}{\partial x} = 0, \\ c) \frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{\partial S_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{zy}}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

(1) და (2) შესაბამისად დრეკადი წონასწორობის და ელექტროსტატიკის განტოლებებია. ამ შემთხვევაში სიმარტივისთვის მოცულობითი ძალები მივიღოთ ნულის ტოლად.

თერმოელექტროდრეკადობის ფიზიკურ კანონს აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned}
 N_x &= c_1 \varepsilon_{xx} + (c_1 - 2c_5) \varepsilon_{yy} + c_3 \varepsilon_{zz} - e_1 E_z - \beta_{10} T, \\
 N_y &= (c_1 - 2c_5) \varepsilon_{xx} + c_1 \varepsilon_{yy} + c_3 \varepsilon_{zz} - e_1 E_z - \beta_{10} T, \\
 N_z &= c_3 (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + c_2 \varepsilon_{zz} - e_2 E_z - \beta_{20} T, \\
 S_{yz} &= c_4 \varepsilon_{yz} - e_3 E_y, \quad S_{xz} = c_4 \varepsilon_{xz} - e_3 E_x, \quad S_{xy} = c_5 \varepsilon_{xy}, \\
 D_x &= e_3 \varepsilon_{xz} + \varepsilon_1 E_x, \quad D_y = e_3 \varepsilon_{yz} + \varepsilon_1 E_y, \\
 D_z &= e_1 (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + e_2 \varepsilon_{zz} + \varepsilon_2 E_z,
 \end{aligned} \tag{3}$$

ხოლო კოშის განტოლებებს აქვთ შემდეგი სახე

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \\
 \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y},
 \end{aligned} \tag{4}$$

სადაც u, v, w – გადაადგილების \vec{U} ვექტორის მდგენელებია შესაბამის ღერძებზე.

T ტემპერატურისათვის გვაქვს:

$$\Delta_2 T + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \tag{5}$$

განტოლება შესაბამისი სასაზღვრო პირობებით. აქ λ_1, λ_2 თბოგამტარებლობის კოეფიციენტებია იზოტროპიის სიბრტყეში და z ღერძის გასწვრივ.

$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ლაპლასის ოპერატორია დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში.

იმ შემთხვევაში, როცა გადაადგილების \vec{U} ვექტორის როტორის კომპონენტებს შემდეგი სახე აქვთ:

$$\begin{aligned}
 a) \quad B_x &= c_4 \left[\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right], \\
 b) \quad B_y &= c_4 \left[\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right], \\
 c) \quad B_z &= c_5 \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right].
 \end{aligned} \tag{6}$$

და გავითვალისწინებთ, რომ

$$\begin{aligned}
 a) S_{zy} &= B_x + 2c_4 \frac{\partial v}{\partial z} + e_3 \frac{\partial \phi}{\partial y} = -B_x + \frac{\partial w}{\partial y} + e_3 \frac{\partial \phi}{\partial y}, \\
 b) N_{zx} &= B_y + 2c_4 \frac{\partial w}{\partial x} + e_3 \frac{\partial \phi}{\partial x} = -B_y + 2c_4 \frac{\partial u}{\partial z} + e_3 \frac{\partial \phi}{\partial x}, \\
 c) N_{xy} &= B_z + 2c_5 \frac{\partial u}{\partial y} = -B_z + 2c_5 \frac{\partial v}{\partial x},
 \end{aligned} \tag{7}$$

მაშინ (1) და (2) სისტემისთვის გვექნება:

$$\begin{aligned}
 a) & \frac{c_3 + 2c_4}{c_1} \frac{\partial \tilde{K}}{\partial z} + \frac{c_1 c_2 - (c_3 + 2c_4)^2}{c_1} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial B_y}{\partial x} + \frac{\partial B_x}{\partial y} = \\
 & = \frac{\beta_{20} c_1 - (c_3 + 2c_4)}{c_1} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{(c_3 + 2c_4) e_1 - c_1 e_2}{c_1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - e_3 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right), \\
 b) & \frac{\partial \tilde{K}}{\partial x} - \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z} + e_3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} = 0, \\
 c) & \frac{\partial B_z}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{K}}{\partial y} - \frac{\partial B_x}{\partial z} + e_3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} = 0, \\
 d) & \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0,
 \end{aligned} \tag{8}$$

სადაც

$$\tilde{K} = c_1 \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] + (c_3 + 2c_4) \frac{\partial w}{\partial z} - \beta_{10} T + e_1 \frac{\partial \phi}{\partial z}. \tag{9}$$

განვიხილოთ ტრანსტროპული მრავალფენიანი ფილა $\Omega = \bigcup_{k=1}^l \Omega_k$, სადაც

$$\Omega_k = x_0 < x < x_1, \quad y_0 < y < y_1, \quad z_0 < z < z_1, \quad \text{როგორც } \bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^l \bar{\Omega}_k,$$

სადაც $\bar{\Omega}_k = x_0 \leq x \leq x_1, \quad y_0 \leq y \leq y_1, \quad z_0 \leq z \leq z_1$.

აღვნიშნოთ z_k საკოორდინატო სიბრტყის შესაბამის სიბრტყე $s = s_k$ -თი, ამასთან $k = 0$ ან $k = l$.

T ტემპერატურა, φ ელექტრული პოტენციალი, გადაადგილების \vec{U} ვექტორი, ელექტრული \vec{D} ინდუქციის ვექტორი, ელექტრული \vec{E} ველის ვექტორი და ძაბვის ტენზორის კომპონენტები k -ურ ფენაში აღვნიშნავთ ზედა k ინდექსით.

სასაზღვრო და საკონტაქტო პირობებს, რომლებსაც ქვემოთ განვიხილავთ შესაბამისი სასაზღვრო ან სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების დასმისას აქვთ შემდეგი სახე:

S_0 ან S_l ზედაპირზე (ანუ საკოორდინატო z_0 ან z_l სიბრტყეზე)

$$\begin{aligned}
 a) N_z &= F_{j1}(x, y), \quad S_{zx} = F_{j2}(x, y), \quad S_{zy} = F_{j3}(x, y); \\
 b) w &= f_{j1}(x, y), \quad u = f_{j2}(x, y), \quad v = f_{j3}(x, y); \\
 c) N_z &= F_{j1}(x, y), \quad u = f_{j2}(x, y), \quad v = f_{j3}(x, y); \\
 d) w &= f_{j1}(x, y), \quad S_{zx} = F_{j2}(x, y), \quad S_{zy} = F_{j3}(x, y).
 \end{aligned} \tag{10}$$

ამასთან, როცა $z = z_0$ ან $z = z_l$ ტემპერატურული ველისათვის მოცემულია შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$a) \frac{\partial T}{\partial y} = F_{j1}(x, y), \quad \text{ან} \quad b) T = F_{j2}(x, y), \quad \text{ან} \quad c) \frac{\partial T}{\partial y} + \Theta_j T = F_{j3}(x, y), \tag{11}$$

ხოლო ელექტრული ველისათვის

$$a) \varphi = F_{j4}(x, y), \quad \text{ან} \quad b) D_z = F_{j5}(x, y). \tag{12}$$

(10), (11) ტოლობებში $k = 0$ ან $l, j = 0, 1$. ყოველ ფენაში როცა $x = x_0$ ან $x = x_1$

$$a) \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad u = 0, \quad S_{zx} = 0, \quad B = 0, \quad D_x = 0, \quad \text{ან} \tag{13}$$

$$b) T = 0, \quad K = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \varphi = 0.$$

როცა $y = y_0$ ან $y = y_1$

$$a) \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad v = 0, \quad S_{zy} = 0, \quad B = 0, \quad D_y = 0, \tag{14}$$

$$b) T = 0, \quad K = 0, \quad u = 0, \quad w = 0, \quad \varphi = 0$$

k -ურ საკონტაქტო S_k ზედაპირზე სრულდება შემდეგი პირობები:

$$\begin{aligned}
 T^k - T^{k+1} &= 0, \quad \frac{\partial T^k}{\partial z} - \frac{\partial T^{k+1}}{\partial z}, \\
 D_z^k - D_z^{k+1} &= 0, \quad \frac{\partial D_z^k}{\partial z} - \frac{\partial D_z^{k+1}}{\partial z}, \\
 N_z^k - N_z^{k+1} &= 0, \quad S_{zx}^k - S_{zx}^{k+1} = 0, \quad S_{zy}^k - S_{zy}^{k+1} = 0, \\
 u^k - u^{k+1} &= 0, \quad v^k - v^{k+1} = 0, \quad w^k - w^{k+1} = 0,
 \end{aligned} \tag{15}$$

აწ

$$\begin{aligned} w^k - w^{k+1} &= 0, \quad N_{zy}^k - N_{zy}^{k+1} = 0, \\ S_{zx}^k &= 0, \quad S_{zx}^{k+1} = 0, \\ S_{zy}^k &= 0, \quad S_{zy}^{k+1} = 0; \end{aligned} \quad (16)$$

აწ

$$\begin{aligned} N_{zy}^k &= 0, \quad N_{zy}^{k+1} = 0, \quad S_{zx}^k - S_{zx}^{k+1} = 0, \quad S_{zy}^k - S_{zy}^{k+1} = 0, \\ u^k - u^{k+1} &= 0, \quad v^k - v^{k+1} = 0; \end{aligned} \quad (17)$$

და ა.შ.

ამასთან, (10) - (12) ფორმულებში შემავალი $F_{ji}(x, y)$, $f_{ji}(x, y)$ ფუნქციები $\bar{\Omega}_z = \{x_0 < x < x_1; y_0 < y < y_1\}$ არეში მოცემული ფუნქციებია. ისეთი, რომ ფილის წიბოებზე სრულდება შეთანხმებულობის პირობები. რაც შეეხება

$$\begin{aligned} F_{ip} &= F_{ip}(x, y) \left(p = \overline{1, 6} \right), \quad f_{iq} = f_{iq}(x, y) \left(q = \overline{1, 5} \right), \\ F_r &= F_r(x, y) \left(r = \overline{1, 7} \right), \quad f_s = f_s(x, y) \left(s = \overline{1, 5} \right) \end{aligned}$$

ფუნქციებიდან მოვითხოვთ, $F_{ip} \in C^{1,q}(S_k)$, $f_{iq} \in C^{2,q}(S_k)$, $C^{i,q}(S_k)$ -ფილის ზედაპირზე i -ჯერ მათი უწყვეტად დიფერენცირებადობა, ამასთან i -ური წარმოებული ეკუთვნის $C^{0,q}(S_k)$, $\frac{1}{2} < q < 1$ ჰელდერის კლასს. ეს პირობები უზრუნველყოფენ, იმას რომ ფუნქციები შეგვიძლია წარმოვადგინოთ აბსოლუტური და თანაბრად კრებადი ფურიეს მწკრივების სახით. გარდა ამისა, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ ფილის წიბოებზე ისინი აკმაყოფილებენ შეთანხმებულობის პირობებს.

სასაზღვრო და სასაზღვრო - საკონტაქტო ამოცანების ამოხსნისათვის ხელსაყრელია (10)-(12) პირობები შესაბამისად შევცვალოთ შემდეგი პირობებით (ქვემოთ კონკრეტული სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნისას დავრწმუნდებით ასეთი შეცვლის უპირატესობაში):

$$\begin{cases} a) \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad u = 0, \quad S_{zx} = 0, \quad B = 0, \quad D_x = 0, \\ b) \quad T = 0, \quad K = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \varphi = 0. \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} a) \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad v = 0, \quad S_{zy} = 0, \quad B = 0, \quad D_y = 0, \\ b) T = 0, \quad K = 0, \quad u = 0, \quad w = 0, \quad \phi = 0, \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} a) \frac{\partial T}{\partial y} = F_{j1}(x, y), \\ b) T = F_{j2}(x, y), \\ c) \frac{\partial T}{\partial y} + \Theta_j T = F_{j3}(x, y), \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} a) \phi = F_{j4}(x, y), \\ b) D_z = F_{j5}(x, y). \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} a) N_z^k = F_{j6}(x, y), \Gamma_1(S_{xz}^k, S_{zy}^k) = \tilde{F}_{j7}(x, y), \Gamma_2(S_{xz}^k, S_{zy}^k) = \tilde{F}_{j8}(x, y), \\ b) w^k = f_{j3}(x, y), \Gamma_1(u^k, v^k) = \tilde{f}_{j1}(x, y), \Gamma_2(u^k, v^k) = \tilde{f}_{j2}(x, y), \\ c) N_z^k = F_{j6}(x, y), \Gamma_1(u^k, v^k) = \tilde{f}_{j1}(x, y), \Gamma_2(u^k, v^k) = \tilde{f}_{j2}(x, y), \\ d) w^k = f_{j3}(x, y), \Gamma_1(S_{xz}^k, S_{zy}^k) = \tilde{F}_{j7}(x, y), \Gamma_2(S_{xz}^k, S_{zy}^k) = \tilde{F}_{j8}(x, y). \end{cases} \quad (22)$$

საკონტაქტო ზედაპირებზე:

$$\begin{aligned} a) N_z^k - N_z^{k+1} &= F_1(x, y), w^k - w^{k+1} = 0, \\ \Gamma_1(S_{xz}^k - S_{xz}^{k+1}, S_{zy}^k - S_{zy}^{k+1}) &= 0, \Gamma_2(S_{xz}^k - S_{xz}^{k+1}, S_{zy}^k - S_{zy}^{k+1}) = 0, \\ \Gamma_1(u^k - u^{k+1}, v^k - v^{k+1}) &= 0, \Gamma_2(u^k - u^{k+1}, v^k - v^{k+1}) = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} b) N_z^k - N_z^{k+1} &= 0, w^k - w^{k+1} = 0, \\ \Gamma_1(S_{xz}^k, S_{zy}^k) &= 0, \Gamma_1(S_{xz}^{k+1}, S_{zy}^{k+1}) = 0, \\ \Gamma_2(S_{xz}^k, S_{zy}^k) &= 0, \Gamma_2(S_{xz}^{k+1}, S_{zy}^{k+1}) = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} c) N_z^k &= 0, N_z^{k+1} = 0, \\ \Gamma_1(u^k - u^{k+1}, v^k - v^{k+1}) &= 0, \Gamma_2(u^k - u^{k+1}, v^k - v^{k+1}) = 0, \\ \Gamma_1(S_{xz}^k - S_{xz}^{k+1}, S_{zy}^k - S_{zy}^{k+1}) &= 0, \Gamma_2(S_{xz}^k - S_{xz}^{k+1}, S_{zy}^k - S_{zy}^{k+1}) = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

სადაც $\Gamma_1(\eta_1, \eta_2) = \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + \frac{\partial \eta_2}{\partial y}$, $\Gamma_2(\eta_1, \eta_2) = \frac{\partial \eta_2}{\partial x} - \frac{\partial \eta_1}{\partial y}$, ამასთან $\eta_1 = S_{zx}$ ან

$$\eta_2 = S_{zy} \text{ ან } \eta_1 = u \text{ ან } \eta_2 = v; F_{j1}(x, y), \tilde{F}_{j2}(x, y) \in C^{1,q}(S_k),$$

$$f_{j1}(x, y), \tilde{f}_{j2}(x, y) \in C^{2,q}(S_k).$$

სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების რეგულარული ამონახსნი ჰქვია ისეთ ამონახსნს, როდესაც $u^k, v^k, w^k \in C^3(\Omega_k) \cap C^{2,q}(\bar{\Omega}_k)$

ფუნქციები აკმაყოფილებენ როგორც განტოლებებს, ასევე სასაზღვრო და საკონტაქტო პირობებს.

სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების რეგულარული ფუნქციათა კლასში ზოგად ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} u = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Psi_3 + \frac{1}{2c_4} \Psi_2 \right) + \frac{1}{c_5} \frac{\partial \Psi_1}{\partial y}, \\ v = \frac{\partial}{\partial y} \left(\Psi_3 + \frac{1}{2c_4} \Psi_2 \right) - \frac{1}{c_5} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x}, \\ w = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\Psi_3 + \frac{1}{2c_4} \Psi_2 \right) + \frac{1}{c_4} \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} - \frac{\varepsilon_3}{c_4} \varphi. \end{cases} \quad (26)$$

სადაც $\psi_1(x, y, z)$, $\psi_2(x, y, z)$, $\psi_3(x, y, z)$ და $\varphi = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z}$ ფუნქციები შემდეგი განტოლებათა სისტემის ამონახსნია

$$\begin{cases} a) \Delta_2 \psi_1 + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = 0, \\ b) \Delta_2 \psi_3 + a_1 \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} - a_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} - a_3 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z^2} + a_{10} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2} = 0, \\ c) \Delta_2 \psi_2 + a_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} - a_4 \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} - a_5 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z^2} - a_9 \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2} = 0, \\ e) \Delta_2 \tilde{\varphi} + a_6 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z^2} - a_7 \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} - a_8 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} - a_{10} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2} = 0, \end{cases} \quad (27)$$

აქ a_1, a_2, \dots, a_{10} განსაზღვრული მუდმივებია.

სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის მეთოდის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ სასაზღვრო ამოცანა პიეზოკერამიკული ფილისათვის, რომლის გვერდებზე მოცემულია (18)- (22) პირობები. ამ შემთხვევაში

$$\begin{cases} \Psi_1 = \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \left[A_{1mn} e^{-p_1 z} + B_{1mn} e^{-p_1(z-z_1)} \right] \cos(mx) \cos(ny), \\ \Psi_2^0 = \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \left[A_{2mn} e^{-p_1 z} + B_{2mn} e^{-p_1(z-z_1)} \right] \sin(mx) \sin(ny), \\ \Psi_3^0 = \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \left[A_{3mn} e^{-p_1 z} + B_{3mn} e^{-p_1(z-z_1)} \right] \sin(mx) \sin(ny), \\ \Phi^0 = \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \left[A_{4mn} e^{-p_1 z} + B_{4mn} e^{-p_1(z-z_1)} \right] \sin(mx) \sin(ny), \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
N_z &= \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \left[d_7 p_1^2 e^{-p_1 z} A_{1mn} + d_7 p_1^2 e^{-p_1(z-z_1)} B_{1mn} + d_8 p_2^2 e^{-p_2 z} A_{2mn} + d_8 p_2^2 e^{-p_2(z-z_1)} B_{2mn} + \right. \\
&\quad \left. + d_9 p_3^2 e^{-p_3 z} A_{3mn} + d_9 p_3^2 e^{-p_3(z-z_1)} B_{3mn} \right] \sin(mx) \sin(ny) \\
\Gamma_1(S_{xz}^k, S_{zy}^k) &= \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \left[-d_7 p_1^3 e^{-p_1 z} A_{1mn} - d_7 p_1^3 e^{-p_1(z-z_1)} B_{1mn} - d_8 p_2^3 e^{-p_2 z} A_{2mn} - d_8 p_2^3 e^{-p_2(z-z_1)} B_{2mn} - \right. \\
&\quad \left. - d_9 p_3^3 e^{-p_3 z} A_{3mn} - d_9 p_3^3 e^{-p_3(z-z_1)} B_{3mn} \right] \sin(mx) \sin(ny), \\
\Gamma_2(\tau_{xz}^k, \tau_{zy}^k) &= \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \left[-c^2 p_1^3 e^{-p_1 z} A_{1mn} - c^2 p_1^3 e^{-p_1(z-z_1)} B_{1mn} - \right. \\
&\quad \left. - c^2 p_1^3 e^{-p_1(z-z_1)} B_{1mn} \right] \cos(mx) \cos(ny), \\
\varphi &= \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \left[-d_{10} p_1^2 e^{-p_1 z} A_{1mn} - d_{10} p_1^2 e^{-p_1(z-z_1)} B_{1mn} - \bar{a} p_2^2 e^{-p_2 z} A_{2mn} - \bar{a} p_2^2 e^{-p_2(z-z_1)} B_{2mn} + \right. \\
&\quad \left. + d_{11} p_3^2 e^{-p_3 z} A_{3mn} + d_{11} p_3^2 e^{-p_3(z-z_1)} B_{3mn} \right] \sin(mx) \sin(ny)
\end{aligned}$$

$z = 0$ და $z = z_1$ სასაზღვრო ზედაპირზე მოცემული ფუნქციები გავშალოთ ფურიეს ტრიგონომეტრიულ მწკრივებად და გავუტოლოთ ისინი ამავე ზედაპირზე მოცემულ $N_z, \Gamma_1(S_{xz}^k, S_{zy}^k), \Gamma_2(S_{xz}^k, S_{zy}^k)$ გამოსახულებებს. ამის შედეგად A_i, B_i მუდმივების მიმართ მივიღებთ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას. ამ სისტემიდან:

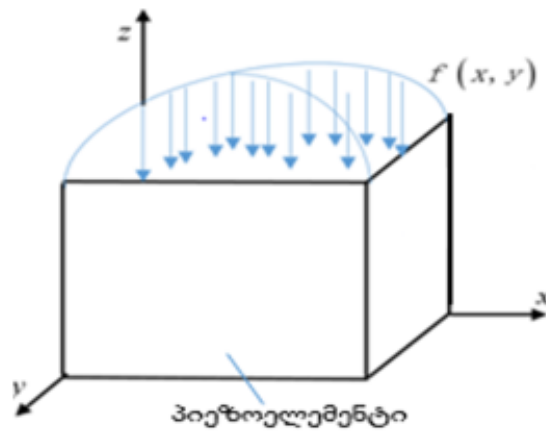
$$\begin{aligned}
A_{1mn} &= \frac{c^2 p_1^3 \bar{F}_{31mn} - c^2 p_1^3 e^{-p_1 z_1} \bar{F}_{32mn}}{c^4 p_1^6 (1 - e^{-2p_1 z_1})}, \\
B_{1mn} &= \frac{c^2 p_1^3 \bar{F}_{32mn} - c^2 p_1^3 e^{-p_1 z_1} \bar{F}_{31mn}}{c^4 p_1^6 (1 - e^{-2p_1 z_1})},
\end{aligned}$$

ხოლო $A_{2mn}, B_{2mn}, A_{3mn}, B_{3mn}$ მუდმივებისათვის მივიღებთ უსასრულო ალგებრულ განტოლებათა სისტემას $\Lambda_i (i = 1, 2, 3 \dots)$ ბლოკურ-დიაგონალური მატრიცით. $A_{1mn}, B_{1mn}, A_{2mn}, B_{2mn}, A_{3mn}, B_{3mn}$ მუდმივების განსაზღვრის შემდეგ, შესაბამისი ფორმულების გამოყენებით ფილის ნებისმიერ წერტილში შეიძლება ვიპოვოთ გადაადგილების ვექტორი და ძაბვის ტენზორის კომპონენტების მნიშვნელობები.

ანალოგიურად აიგება ამოხსნა ნებისმიერი სხვა სასაზღვრო ამოცანისთვის.

ამავე პარაგრაფის ბოლოს მოყვანილია რიცხვითი ანალიზის შედეგები სხვადასხვა მასალისაგან დამზადებული პიეზოკერამიკული ფილისათვის.

პიეზოელემენტი წარმოადგენს ZnO ან CdS ან $PTC-19$ ან $PTBC-3$ პიეზოკერამიკული მასალისაგან დამზადებულ ფილას. ფილის ზედა წახნაგი თავისუფალია გარე დატვირთვისაგან. იმავე წახნაგზე დაკრულია ელექტროდი, რომელთანაც მიყვანილია პოტენციალი (ნახ.7).



ნახ. 7

ფილას დეკარტის მართკუთხა x, y, z კოორდინატთა სისტემაში უკავია

$$\begin{aligned} \Omega &= \{0 < x < x_1; 0 < y < y_1; 0 < z < z_1\} \\ \bar{\Omega} &= \{0 \leq x \leq x_1; 0 \leq y \leq y_1; 0 \leq z \leq z_1\}. \end{aligned} \quad (29)$$

არე. 28-ე ფორმულების გოვალისწინებით, ქვემოთ მოგვყავს N_x და N_y ნორმალური დაბევისათვის რიცხვითი მნიშვნელობები (მექანიკური დაბევის ეს მნიშვნელობები, რომლებიც მცირედ განსხვავდებიან დაბევის მაქსიმალური მნიშვნელობებისაგან შესაბამის წერტილებში, მაინც გვიქმნის წარმოდგენას იმის შესახებ, თუ როგორ არიან დაბევი განაწილებული პიეზოელემენტში). ამოცანის ამოსახსნელად შედგენილი იქნა ბლოკ-სქემა.

1. კვადრტული ფილის გვერდი-100მმ, ფილის სისქე - 50მმ. ამ ფილისათვის ფიზიკო-მექანიკური მუდმივების რიცხვითი მნიშვნელობებია (პიეზოკერამიკა ZnO ტიპის):

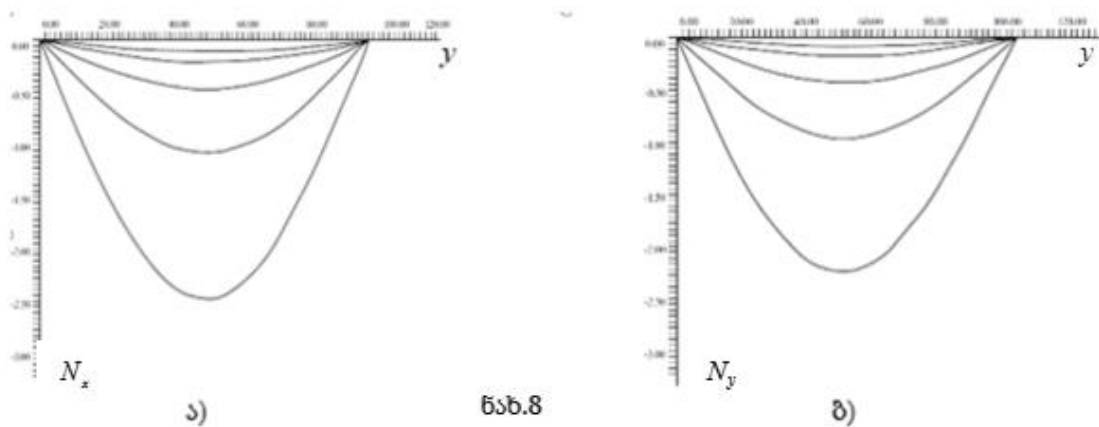
$$c_1 = 20,97 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, c_2 = 20,97 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, c_3 = 10,51 \cdot 10^{10} \text{ Pa},$$

$$c_4 = 4,97 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, c_5 = 4,43 \cdot 10^{10} \text{ Pa},$$

$$e_1 = -0,61 \text{ km/m}^2, e_2 = 1,14 \text{ km/m}^2, e_3 = 0,59 \text{ km/m}^2,$$

$$\mathfrak{D}_1 = 7,38 \cdot 10^{-11} \text{ F/m}, \quad \mathfrak{D}_2 = 7,83 \cdot 10^{-11} \text{ F/m}.$$

როცა $x = 50 \text{ მმ}$, $y = 5,10, \dots, 100 \text{ მმ}$, $z = 5,10,15,20,15 \text{ მმ}$, შესაბამისი გრაფიკები N_x და N_y მოყვანილია მე-8 ნახაზზე.



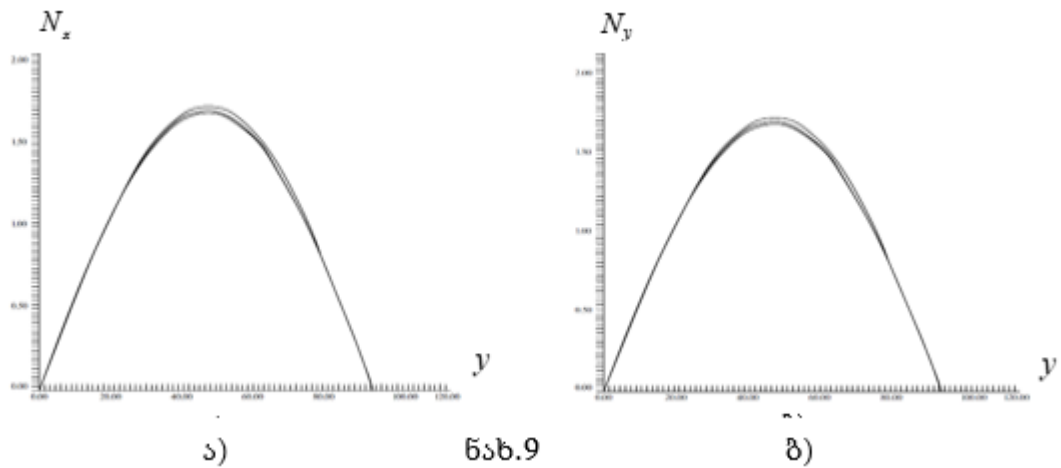
2. კვადრტული ფილის გვერდი-100 მმ, ფილის სისქე-50 მმ. ამ ფილისათვის ფიზიკო-მექანიკური მუდმივების რიცხვითი მნიშვნელობებია (პიეზოკერამიკა Cds ტიპის):

$$c_1 = 8,56 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, c_2 = 9,36 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, c_3 = 4,62 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, c_4 = 1,49 \cdot 10^{10} \text{ Pa},$$

$$c_5 = 1,62 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, e_1 = -0,24 \text{ km/m}^2, e_2 = 0,44 \text{ km/m}^2, e_3 = -0,21 \text{ km/m}^2,$$

$$\mathfrak{D}_1 = 7,99 \cdot 10^{-11} \text{ F/m}, \quad \mathfrak{D}_2 = 8,44 \cdot 10^{-11} \text{ F/m}.$$

როცა $x = 50 \text{ მმ}$, $y = 5,10, \dots, 100 \text{ მმ}$, $z = 5,10,15,20,15 \text{ მმ}$, შესაბამისი გრაფიკები N_x და N_y მოყვანილია მე-9 ნახაზზე.



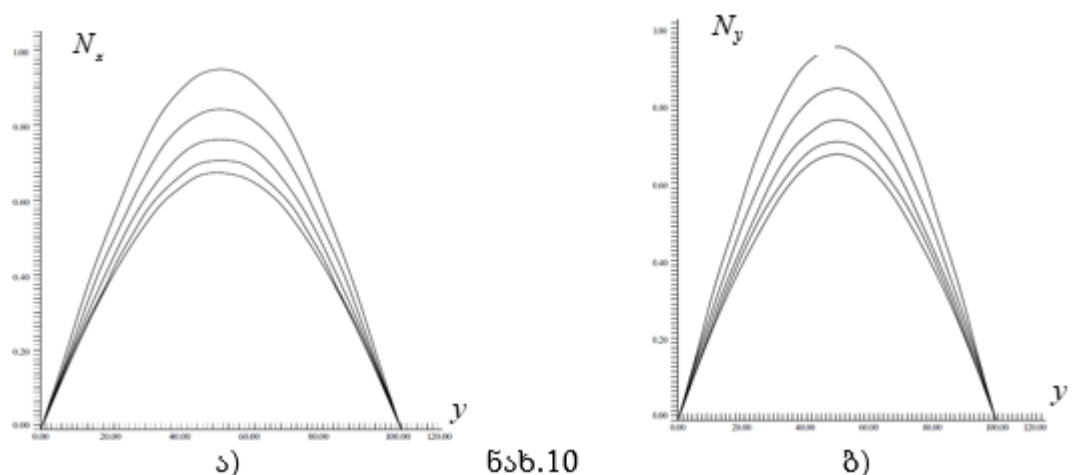
3. კვადრტული ფილის გვერდი-100 მმ, ფილის სისქე-50 მმ. ამ ფილისათვის ფიზიკო-მექანიკური მუდმივების რიცხვითი მნიშვნელობებია (პიეზოკერამიკა PZT-19 ტიპის):

$$c_1 = 10,09 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, c_2 = 9,3 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, c_3 = 5,4 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, c_4 = 2,4 \cdot 10^{10} \text{ Pa},$$

$$c_5 = 2,4 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, \quad e_1 = -3,4 \text{ km/m}^2, \quad e_2 = 15,1 \text{ km/m}^2, \quad e_3 = 9,45 \text{ km/m}^2,$$

$$\mathfrak{D}_1 = 12,38 \cdot 10^{-9} \text{ F/m}, \quad \mathfrak{D}_2 = 15,3 \cdot 10^{-9} \text{ F/m}.$$

როცა $x = 50 \text{ მმ}$, $y = 5,10, \dots, 100 \text{ მმ}$, $z = 5,10,15,20,15 \text{ მმ}$, შესაბამისი გრაფიკები N_x და N_y მოყვანილია მე-10 ნახაზზე.



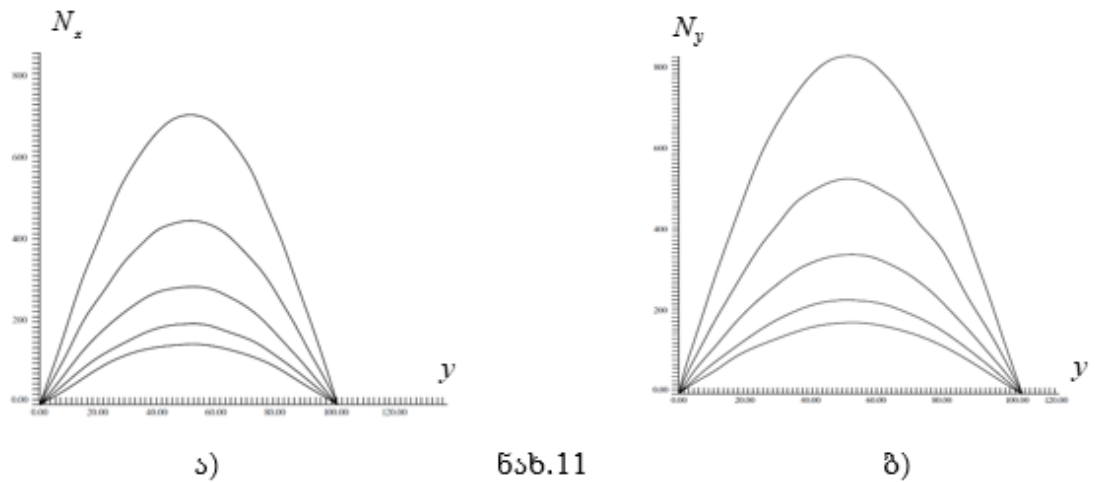
4. კვადრტული ფილის გვერდი-100მმ, ფილის სისქე-50მმ. ამ ფილისათვის ფიზიკო-მექანიკური მუდმივების რიცხვითი მნიშვნელობებია (პიეზოკერამიკა PZT-19 ტიპის):

$$c_1 = 15,1 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, c_2 = 13,6 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, c_3 = 8 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, c_4 = 2,9 \cdot 10^{10} \text{ Pa},$$

$$c_5 = 3,6 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, e_1 = -7,9 \text{ km/m}^2, e_2 = 17,7 \text{ km/m}^2, e_3 = 15,4 \text{ km/m}^2, ,$$

$$\mathfrak{D}_1 = 22,5 \cdot 10^{-9} \text{ F/m}, \mathfrak{D}_2 = 18,47 \cdot 10^{-9} \text{ F/m}.$$

როცა $x = 50 \text{ მმ}$, $y = 5, 10, \dots, 100 \text{ მმ}$, $z = 5, 10, 15, 20, 15 \text{ მმ}$ შესაბამისი გრაფიკები N_x და N_y მოყვანილია მე-11 ნახაზზე.



მიღებული გრაფიკების ანალიზი იძლევა საშუალებას გამოვიტანოთ შემდეგი დასკვნები:

1. ნებისმიერი პიეზოკერამიკისათვის ელემენტზე სიმეტრიული დატვირთვის დროს აღმოჩნდა რომ განაწილებული ნორმალური N_x და N_y ძაბვები ასევე სიმეტრიულია.

2. პირველი ტიპის პიეზოკერამიკისათვის ნორმალურ N_x და N_y ძაბვებს აქვს უარყოფითი მნიშვნელობა, მაგრამ სხვა ტიპისათვის კი მათი მნიშვნელობა დადებითია, რაც ნიშნავს იმას რომ პირველ შემთხვევაში პიეზოელემენტი იკუმშება x და y ღერძების მიმართულებით, სხვა შემთხვევებში ელემენტი გაჭიმულია.

3. ვინაიდან ნორმალური N_x და N_y ძაბვების განაწილება სხვადასხვა პიეზოკერამიკისათვის შეიძლება იყოს სხვადასხვა ნიშნის, მაშინ შეიძლება წარმოვიდგინოთ ისეთი ელემენტის არსებობა, რომელსაც აქვს ისეთი ფიზიკური მახასიათებლები, რომლის დროს ნორმალური ძაბვის მნიშვნელობა იქნება ნულის ტოლი.

4. შეიძლება ავსაგოთ მრავალფენიანი ელემენტი, როდესაც ერთ-ერთი ფენა გაჭიმულია, ხოლო დანარჩენი ფენები იკუმშება.

მიღებული ამონახსნები შეიძლება გამოვიყენოთ პიეზოელექტრული მახასიათებლების განსაზღვრისათვის შემდეგი ალგორითმით:

შესვლა:

მოცემულია მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის პიეზოკერამიკული ელემენტი, რომლის გვერდითი წახნაგები დამაგრებულია სპეციალური სახით და მოცემულია ელემენტალური ტიპის გარე დატვირთვა.

I ეტაპი. პიეზოელემენტის რამდენიმე წერტილში იზომება გადაადგილების მნიშვნელობა (არა უმეტეს 10 წერტილისა).

II ეტაპი. გამოყენებულია მიღებული ამონახსნი სასაზღვრო სიბრტყეზე, ვლებულობთ ალგორითმულ გამოსახულებებს გადაადგილების კომპლექსური ვექტორისათვის.

III ეტაპი. გავუტოლებთ რა რიცხვით მნიშვნელობებს გამოსახულებების განზომილებებს, რომელიც მიღებულია ფიზიკური მახასიათებლების შედარებით ანალიზურ ამოხსნასთან, ვლებულობთ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას ათი უცნობით.

IV ეტაპი. მიღებული სისტემის ამოხსნით ვლებულობთ ფიზიკური მახასიათებლების მნიშვნელობებს.

ოპტიმალური წონის ამოცანა, რომელიც ოპტიმალური სისქის იდენტური ამოცანაა იხსნება ასევე შემოთავაზებული ამონახსნების დახმარებით.

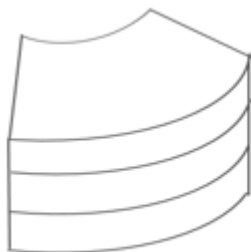
განვიხილოთ ისეთი ალგორითმი, რომლის შეყვანის დროს მოცემულია პიეზოელემენტი მახასიათებლებით, გარე დატვირთვებით, შიგა (დამაბულ-დეფორმირებადი) პიეზოელემენტის მდგომარეობით, ხოლო გამოსვლის დროს უნდა განისაზღვროს ოპტიმალური სისქე, ისე რომ არ შეიცვალოს ელემენტის სხვა ზომები.

I ეტაპი. მოცემული მდგომარეობის საშუალებით დგინდება ანალიზური გამოსახულებების ზუსტი ამონახსნი.

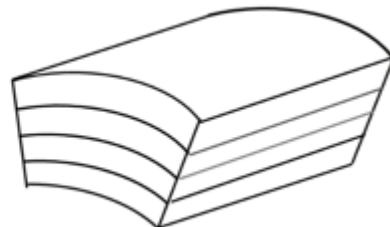
II ეტაპი. ანალიზურ ამონახსნში უცნობ სიდიდედ გამოიყენება ცვლადი, რომელიც ახასიათებს ელემენტის სისქეს და მოიცემა ფიზიკური მახასიათებლებით.

III ეტაპი. ამ ეტაპზე რიცხვითი ანალიზის დახმარებით ფიზიკური მახასიათებლების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის განისაზღვრება პიეზოელემენტის მდგომარეობა, რომელიც იდენტურია ოპტიმალური სისქის მოცემული მდგომარეობის.

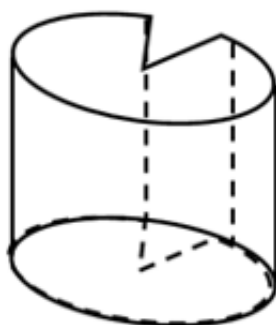
მესამე თავი მთლიანად ეძღვნება მრავალფენიან ცილინდრული ფორმის პიეზოკერამიკულ ფილისათვის სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების ამოხსნას. წინა თავში მიღებული მეთოდი შეგვიძლია გავავრცელოთ სასრული ცილინდრული ფილისათვის, ცილინდრული სექტორისათვის, ცილინდრული პანელისათვის და ა.შ. ქვემოთ მოყვანილია ზოგიერთი მათგანი:



ნახ.12



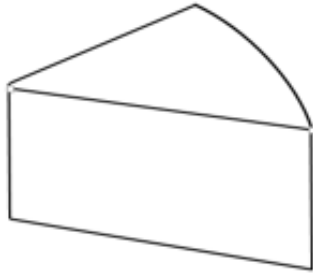
ნახ.13



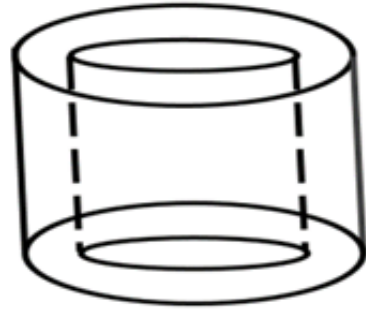
ნახ.14



ნახ.15



ნახ.16



ნახ.17

მთლიანი ფილისთვის განხილულია და ამოხსნილია შიგა და გარე ამოცანები.

მესამე თავის პირველ პარაგრაფში მოცემულია ცილინდრულ კოორდინატებში ძირითადი განტოლებები, ზოგადი ამონახსნები. მოყვანილია ყველა სასაზღვრო და საკონტაქტო პირობები, რომლებიც ფიგურირებენ სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების დასმისას. მითითებულია სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების ამოხსნის მეთოდოლოგია.

დასკვნა

ზოგადი თეორიული და პრაქტიკული შედეგები

სადისერტაციო ნაშრომში სხვადასხვა გეომეტრიის სამგანზომილებიანი სასრული პიეზოკერამიკული ფილების სასაზღვრო და საკონტაქტო ამოცანებისათვის აგებული მათემატიკური მოდელის საფუძველზე შემოთავაზებულია სასაზღვრო და საკონტაქტო ამოცანების შესწავლის და ანალიზის ხერხები. ამ საკითხების გადასაწყვეტად დისერტაციაში ამოხსნილია შემდეგი ძირითადი ამოცანები:

1. განზოგადებულ ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში, პიეზოკერამიკული ფილებისათვის მიღებული მათემატიკური მოდელი. ფილისათვის, რომელზეც გარე შემოფოთებების გარდა, მოქმედებს სტაციონარული, ტემპერატურული და ელექტრული ველი მათემატიკური მოდელის ასაგებად გამოყენებულია ნ. ხომასურიძის მეთოდი.

2. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში მიღებულია მათემატიკური მოდელი გეგმაში მართკუთხა მრავალფენიანი ფილისათვის, როდესაც მის ორ მოპირდაპირე ფუძეზე მოცემულია არაერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობები, ხოლო დანარჩენ გვერდებზე კი სიმეტრიის ან ანტისიმეტრიის პირობები, ფენებს შორის კი საკონტაქტო პირობები, რომლებიც საშუალებას იძლევა მივიღოთ ზუსტი ამოხსნები.
3. დამტკიცებულია კლასიკური და მოდიფიცირებული სასაზღვრო პირობების ტოლფასობა. მოდიფიცირებული სასაზღვრო პირობები ამარტივებს შესაბამისი სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნას.
4. მართკუთხა პარალელებიპედის ფორმის სქელი ტრანსტროპული ფილისათვის მიღებულია განმსაზღვრელ განტოლებათა სისტემა.
5. მიღებული ამოხსნები შეიძლება გამოყენებული იყოს უსასრულო დრეკადი ფენისათვის მხოლოდ ერთი პირობით, რომ ფენის ზედა და ქვედა სასაზღვრო სიბრტყეებზე მოცემული გარე შემფოთებები ხასიათდებიან გარკვეული პერიოდულობით.
6. მიღებული მეთოდი განზოგადებულია მრავალფენიანი სქელი ფილებისათვის. კერძოდ, განხილულია და მიღებულია სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა ხუთფენიანი ფილისათვის.
7. ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში საკოორდინატო ზედაპირებით შემოსაზღვრული ფილისათვის მიღებული მათემატიკური მოდელი განმსაზღვრელი განტოლებებისა და მოდიფიცირებული სასაზღვრო პირობების გამოყენების საშუალებას იძლევა.
8. სისტემური გამოყენება სიმეტრიის და ანტისიმეტრიის პირობების, ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების შეცვლა მოდიფიცირებული პირობებით, წონასწორობის განტოლებების დივერგენტულ-როტორული ფორმით, და ასევე სასაზღვრო ამოცანების წარმოდგენა ორი სასაზღვრო ამოცანის სუპერპოზიციის სახით ამარტივებს მათ გადაწყვეტას.

გამოქვეყნებული შრომები. დისერტაციის თემაზე გამოქვეყნებულია 5 ნაშრომი.

1. დ. გორგიძე, ლ. ქვარცხავა. ტრანსვერსალურად იზოტროპული წრიული სქელი ფილის ღუნვის ამოცანა თერმული ველის გათვალისწინებით. საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი. გამოყენებითი მექანიკა, შრომათა კრებული, თბილისი, 2010, გვ.106-111.
2. Gorgidze D., Siradze Z., Ramishvili I., Qvarckhava L. Thermo-electroelasticity Equilibrium Transropic Bodies in a Spherical Coordinate System. Nova Publishers, 2013, pp.165-176.
3. დ. გორგიძე, ნ. გულუა, ლ. ქვარცხავა. ტრანსტროპული ელიფსური ცილინდრის თერმოდრეკადი წონასწორობა. Georgian Engineering News, 2017, v. 83, № 3, გვ.5-10
4. დ. გორგიძე, ლ. ქვარცხავა, ნ. გულუა. ცილინდრული პანელის ელექტროდრეკადი წონასწორობა. Georgian Engineering News, 2017, v. 83, № 3, გვ.10-14
5. Л.Кварцхава. Осесимметричное электроупругое равновесие цилиндрического тела. Georgian Engineering News, №2, 2020. გვ. 12-14.

სამუშაოს სტრუქტურა და მოცულობა. ნაშრომი შედგება შესავლისა და 3 თავისაგან, შეიცავს 109 ნაბეჭდ გვერდს, 16 ნახაზს, 8 ცხრილს. ლიტერატურის ჩამონათვალი შეიცავს 80 დასახელებას.

Abstract

Thick ellipse-shaped plates are widely used in different fields of manufacturing technology, as parts of structures and machines. In the process of exploitation, structures, and different devices in general, experience mechanical and thermal influence and therefore, checking the firmness and determining the credibility of them is vital. In particular, through the analysis of the strained-deformed state of a piece, it is possible to determine the index of firmness. However, the complex shape and defects (cavity, non-homogeneity) of a piece can complicate the analysis. Besides, the disintegration of a piece with different types of holes, ridges, and insets is sometimes necessary for technological or constructional purposes. Theoretical and practical studies demonstrate that such disintegration causes the inconsistent concentration of tension, which significantly and significantly changes piece's damage tolerance.

Problems of calculating the firmness of cylinders with different geometric shapes in various exploiting conditions have been originated in the fields of modern construction, technology, and several scopes and machine-building.

Examining the effective ways to tackle those problems is significantly interesting, because altogether, they determine the level of advancement in science and technology. One example of such a problem related to the mechanics of solid deformable bodies is the determination of the temperature field and strained-deformed state of unevenly heated bodies and structural shapes. The results of temperature voltage/tension should be considered in numerous engineering calculations, including construction, nuclear energy), in the process of designing the nuclear reactors, thermally scrutinizing cylindrical bars, producing and scrutinizing metal structures and devices' elements - which are related to the use of inductive heating, calculations for solid fuel engine of rocket, a thick walled cylinder with an internal cavity, and etc.

Analytical and several approximation methods of plate calculations' theory are used for that purpose. We want to highlight that, examining the engineering-

technical problems was always significantly related to the general theoretical problems of solid and deformable body mechanics.

The modern stage of construction development is characterized by the determination of related practical problems and the necessity of solving them. Building engineering process always originates related engineering practical problems, which is also a characteristic of the following dissertation as the connection between theoretical examination and the solutions of practical problems.

The wide use of modern composite materials in construction vitalized the need for examination of the firmness and credibility of structures' elements considering the anisotropy of used materials (transversely isotropic).

The 3-dimensional boundary problems regarding elasticity theory and general solutions and methods of elastic equilibrium equations play and has always played a significant role in the formation and development of calculation methods of firmness and credibility of different structures.

Exactly solving the boundary problems of elasticity theory is a reference for several approximation methods and determination paper of their level of effectiveness. Therefore, solving the problems provided in this dissertation regarding the ellipse-shaped plate and the thermoelastic equilibrium of its parts has a significant practical value.

Additionally, besides analyzing new methods, attention should be paid to the improvement of the existing ones, which has always been an important task.

The mathematical model of non-ordinary problems regarding the thermoelasticity of thick plate, which is caused by the area, as well as the boundary conditions being out of the ordinary, is demonstrated in the paper. The domain of components of the unknown vector of displacement could be an ellipse, one-fourth of the ellipse, three fourth of hollow elliptical cylinder and etc. On the surfaces of those areas could be fulfilled four different conditions.

Using the Fourier method and the general solutions obtained in this paper the solutions of those problems can be simplified to the system of linear algebraic equations. Solving this system expresses the components of displacement vector and voltage tensor exponentially with convergent series - their coefficients are represented clearly.