



საქართველოს ტექნიკური
უნივერსიტეტი

1922 წლიდან

ლიანა ქვარცხავა

თერმოელექტროდრეკადობის თეორიის ზოგიერთი სასაზღვრო-საკონტაქტო
ამოცანების მათემატიკური მოდელირება ფილებისათვის

წარმოდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

სადოქტორო პროგრამა მშენებლობა

შიფრი 0732

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი თბილისი, 0160, საქართველო

2022წ

საავტორო უფლება©2022 წელი დოქტორანტის ლიანა ქვარცხავა

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ფაკულტეტი: სამშენებლო

ჩვენ, ქვემოთ ხელისმომწერნი ვადასტურებთ, რომ გავეცანით ლიანა ქვარცხავას მიერ შესრულებულ სადისერტაციო ნაშრომს დასახელებით: **თერმოელექტროდრეკადობის თეორიის ზოგიერთი სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების მათემატიკური მოდელირება ფილებისათვის და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის საინჟინრო, ტექნოლოგიური და საბუნებისმეტყველო საუნივერსიტეტო სადისერტაციო საბჭოში მის განხილვას დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად.**

-----, ----- 2022წელი

სამეცნიერო ხელმძღვანელი/ხელმძღვანელები:

პროფესორი დავით გორგიძე

პროფესორი თამაზ ბაციკაძე

რეცენზენტი:

რეცენზენტი:

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

2022 წ

ავტორი: ლიანა ქვარცავა

დასახელება: თერმოელექტროდრეკადობის თეორიის ზოგიერთი სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების მათემატიკური მოდელირება ფილებისათვის

სადოქტორო პროგრამა: მშენებლობა

მისანიჭებელი კვალიფიკაცია :

მშენებლობის ინჟინერიის დოქტორის აკადემიური ხარისხი

სხდომა ჩატარდა: _____

ტექნიკური უნივერსიტეტის სამშენებლო ფაკულტეტის სადისერტაციო ნაშრომის დაცვის კოლეგიის სხდომაზე, კორპუსი I, აუდიტორია 508

ინდივიდუალური პიროვნებების ან ინსტიტუტების მიერ ზემომოყვანილი დასახელების დისერტაციის გაცნობის მიზნით მოთხოვნის შემთხვევაში მისი არაკომერციული მიზნებით კოპირებისა და გავრცელების უფლება მინიჭებული აქვს საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტს.

ავტორის ხელმოწერა _____

ავტორი ინარჩუნებს დანარჩენ საგამომცემლო უფლებებს და არც მთლიანი ნაშრომის დაარც მისიცალკეული კომპონენტების გადაბეჭდვა ან სხვა რაიმე მეთოდით რეპროდუქცია დაუშვებელია ავტორის წერილობითი ნებართვის გარეშე.

ავტორი ირწმუნება, რომ ნაშრომში გამოყენებული საავტორო უფლებებით დაცულ მასალებზე მიღებულია შესაბამისი ნებართვა (გარდა იმ მცირე ზომის ციტატებისა, რომლებიც მოითხოვენ მხოლოდ სპეციფიურ მიმართებას ლიტერატურის ციტირებაში, როგორც ეს მიღებულია სამეცნიერო ნაშრომების შესრულებისას) და ყველა მათგანზე იღებს პასუხისმგებლობას.

რეზიუმე

შენობებისა და ნაგებობების მონიტორინგისთვის საზომი მოწყობილობები (გადამწოდებები) აქტიურად გამოიყენება სხვადასხვა დანიშნულების სამშენებლო ობიექტებზე, როგორც მშენებლობის ეტაპზე, ასევე მათი ექსპლუატაციის დროს.

შენობების მშენებლობის და ექსპლუატაციის უსაფრთხოების უზრუნველყოფისათვის აუცილებელია ტექნიკური საფუძველია კონტროლისა და დიაგნოსტიკის საშუალებების დანერგვა. შესრულებული სამეცნიერო კვლევების და ტექნიკური გადაწყვეტილებების დონის შეფასება გვარწმუნებს, რომ დღევანდელ დღეს ახალი თაობის გამზომი სისტემები სამშენებლო ნაგებობების და კონსტრუქციების მრავალფუნქციური კონტროლის საიმედო ორგანიზების საშუალებას იძლევა.

კონსტრუქციების კვლევისთვის და მოწყობილობებში სტატიკური და სტაციონალური დაძაბული-დეფორმირებული მდგომარეობის შესასწავლად ფართოდ გამოიყენება წრფივი დრეკადი და თერმოელექტროდრეკადი სასრული ზომის სხეულის მოდელი.

თერმოელექტრულად აქტიური მასალა თანამედროვე პიეზოტექნიკის საფუძველს წარმოადგენს და სულ უფრო და უფრო ფართოდ გამოიყენება მიკრო და ნანოტექნოლოგიებში.

ამ მასალის სამრეწველო გამოყენება მოიცავს სხვადასხვა ტიპის პიეზოელექტრულ, პიროელექტრულ და სხვა სახის გადამწოდებებს როგორცაა ჰიდროაკუსტიკა, დონის კონტროლი, მოძრაობის პარამეტრები, შენობების დაცვა, მშენებლობის კონტროლი და ა.შ.

პიეზოელექტრული მოწყობილობების ფუნქციონირება, ასევე მათი კონსტრუირება წარმოშობს ამ მასალებისათვის თერმოელექტროდრეკადობის დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის განსაზღვრის ამოცანას.

პიეზოელემენტების პრაქტიკული გამოყენების საკითხები მრავალნაირად იყო გამოკვლეული და ძირითადად პიეზოელექტრიკებში პროცესების გამოსაკვლევად გამარტივებულ მიდგომებს ეყრდნობოდა. თუმცა უნდა აღინიშნოს, რომ თეორიული კვლევისა და შესწავლის პროცესში გამოჩნდა მჭიდრო კავშირი გამოყენებითი ინჟინრული ამოცანების ამოხსნასთან.

ვითარდებოდა მათემატიკური მეთოდებიც პიეზოელემენტში პროცესების ანალიზისთვის, რომელიც დაფუძნებულია თერმოელექტროდრეკადობის თეორიის ძირითად დებულებებზე. დამუშავდა პიეზოელექტრული მასალისაგან დამზადებული ფირფიტების და გარსების ტექნიკური თეორიის სხვადასხვა ვარიანტები.

ამ მიმართულებით არსებული ეფექტური კვლევები შესაძლებელია არსებითად გაუმჯობესდეს დრეკადობის და თერმოელექტროდრეკადობის სასაზღვრო და საკონტაქტო ამოცანების ამოხსნების ახალი მეთოდების დამუშავების, და მათემატიკური მოდელირების ახალი თანამედროვე მეთოდების გამოყენების შედეგად, ასევე ახალი პროგრამული კომპლექტების შექმნა და მათი დახმარებით რიცხვითი ექსპერიმენტების ჩატარება, რომელიც ცვლის ძვირადღირებულ ნატურალურ ექსპერიმენტებს.

სასრული სხულებისათვის პირდაპირი და შებრუნებული ამოცანების ამოხსნის მეთოდებს შორის სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებების კლასიკურმა მეთოდმა და მასზე დაფუძნებულმა სასაზღვრო ელემენტების მეთოდის გამოყენებამ, კარგად გაართვა თავი დრეკადობის თეორიაში იზოტროპიული სხეულებისათვის სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნისას. თუმცა უფრო რთული გარემოსათვის ფუნდამენტური ამოხსნების მიღება გარკვეულ სიმძნელებს აწყდება. ამიტომ ამის გადასაღახავად საჭიროა ახალი, ალტერნატიული მეთოდების დამუშავება.

ამის გამო ასეთი კლასის ამოცანებისათვის ახალი მათემატიკური მოდელის აგება, მათი კვლევა წარმოადგენს საკმაოდ თანამედროვე და მნიშვნელოვან აქტუალურ ამოცანას, რომელსაც განსაკუთრებული ყურადღება აქვს დათმობილი მსოფლიო სამეცნიერო ლიტერატურაში.

ნაშრომის მიზანს წარმოადგენს დრეკადი ტრანსვერსლური იზოტროპული ერთგვაროვანი ფილებისათვის სასაზღვრო და საკონტაქტო ამოცანებისათვის ანალიზური ამონახსნების მიღება. ამომხსნელი განტოლებების მიღება და ანალიზი. ფილის დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის მათემატიკური მოდელის აგება და მისი მთლიანი კვლევა. მათემატიკურ მოდელი არის კერძოწარმოებლიანი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა, რომელიც

შესაბამისი სასაზღვრო და საკონტაქტო პირობებთან ერთად აღწერს სივრცითი ფილის თერმოელექტროდრეკად წონასწორობას. კერძოდ:

- მოხდა ფილის დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის მათემატიკური მოდელირება;
- ჩატარდა მიღებული რეგულარული განტოლებების ანალიზი;
- მიღებულია დეკარტის მართკუთხა და ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში სივრცითი ამოცანების ზუსტი ამონახსნები;
- მიღებულია ერთგვაროვანი გეგმაში მართკუთხა ფილისათვის რიცხვითი რეალიზაციის ალგორითმი.

Abstract

The technical basis for the construction and operation of buildings construction and operation is the introduction of control and diagraphetics. Assessment of the level of scientific research and technical solutions performed by the fact that today the new generation of measuring systems provide reliable organization of the multifunctional concrete organizations and constructs.

Linear elongated and thermal power finite-sized body model is widely used to study the static and stationary tense and stationary conditions for the study of structures and devices.

One of the most important areas in its technical use is the creation and use of thermoelectric active materials.

Thermoelectric active material is the basis of modern piezotechnics and is increasingly used in micro and nanotechnologies.

Industrial use of this material, which includes different types of piezoelectric, pyroelectric and other types of transmitters such as hydraulic, level control, movement parameters, building protection, construction control, etc. etc.

The functioning of piezoelectric devices as well as their constructing the task of determining the tense-deformed state of thermoelectroding for these materials.

The issues of practical use of piezoelements have been investigated in many ways and mainly based on simplified approaches to the processes in piezoelectric. It should be noted, however, that in the theoretical research and study, a close connection with the solution of applied engineering tasks has appeared. Mathematical methods were also developed for analysis of piezoelement processes based on the basic provisions of thermoelectroding theory. Various options for plates and technical theory of piezoelectric material have been developed.

Effective studies in this area can be substantially improved by the processing of new methods of elongation and thermal -electroding tasks, and the use of new modern methods of mathematical modeling, as well as new software kits and with their help to replace expensive natural experiments.

The classical method of solving the border integral equations between the methods of direct and inverted tasks for the finite bodies, and the use of the border elements based on the border elements, has been well -versed in the theory of elongation theory when solving border tasks for isotropic bodies. However, for a more complex environment, fundamental solutions faces some difficulties. Therefore, new, alternative methods are needed to overcome this.

Bécasse of This, building a new mathematical model for such class tasks, their research is a very modern and important topical task that has been paid to the World Scientifique Library.

The purpose of the work is to obtain analytical solutions for borderline and contact tasks for uniform transverse isotro-linen tiles. Getting and analyzing the redeeming equations. Build a mathematical model of a tense-deformed state and its entire research. The mathematical model is a system of private -producing differential equations that, along with the appropriate border and contact conditions, describes the thermoelo -elastic equilibrium of spatial slab. Specifically:

- Mathematical modeling of the tense-deformed condition of the slab;

- Analysis of regular equations received;
- Accurate solutions to spatial tasks in the Descartes rectangular and cylindrical coordinate system;
- A numeric realization algorithm for a rectangular slab is adopted in a homogeneous plan.

შინაარსი

ნაშრომის ზოგადი დახასიათება	9
თავი 1. მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემაში პიეზოელემენტებისათვის ბაზური მათემატიკური მოდელის აგება	17
1.1. ზოგადი მიმოხილვა	17
თავი 2. თერმოელექტროდრეკადობის მათემატიკური მოდელი დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში	33
2.1. სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნა მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის ფილისათვის	33
2.2. ფილის ელექტროდრეკადი წონასწორობა	52
2.3. ელექტროდრეკადი წონასწორობა გეგმაში მართკუთხა ფილისათვის	60
თავი 3. თერმოელექტროდრეკადობის მათემატიკური მოდელი ცილინდრული ფილისათვის	74
3.1. ძირითადი განტოლებები, სასაზღვრო პირობები ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში	74
3.2. ელექტროდრეკადობის თეორიის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა ცილინდრული ფილისათვის	90
3.3. ღერძსიმეტრიული ამოცანა ფილისათვის	94
3.4. ფილისათვის ელემენტარულ ფუნქციებში ამოხსნადი სასაზღვრო ამოცანების კლასი	98
დასკვნა	101
ლიტერატურა	102

ნაშრომის ზოგადი დახასიათება

კვლევის ობიექტი და საგანი. კვლევის ობიექტია ფილები, ხოლო საგანი – ფილების დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის მათემატიკური მოდელირება.

თემის აქტუალობა. შენობებისა და ნაგებობების მონიტორინგი საზომი მოწყობილობების (გადამწოდებები) აქტიურად გამოიყენება სხვადასხვა დანიშნულების სამშენებლო ობიექტების როგორც მშენებლობის ეტაპზე, ასევე მათი ექსპლუატაციის დროს.

საგანგებო სიტუაციების თავიდან აცილების მიზნით საინჟინრო კონსტრუქციების (მზიდი) მონიტორინგის სისტემებით სავალდებულო წესით აღიჭურვება უნიკალური ნაგებობები და შენობები, ისეთი, რომლებსაც აქვთ 100 მ-ზე მეტი სიმაღლე, ან 100 მ-ზე მეტი სიგრძის მალი, ასევე 20 მ-ზე მეტი სიგრძის კონსოლი ან შენობის მიწისქვეშა ნაწილი, რომლის ქვაბულის სიღრმე 15 მ-ზე მეტია.

მიუხედავად იმისა, რომ როგორც წესი შენობებისა და ნაგებობების მონიტორინგის აუცილებლობა განსაზღვრულია მხოლოდ უნიკალური ნაგებობებისთვის, ასეთი სისტემებით ჩვეულებრივი ნაგებობების აღჭურვაც მიზანშეწონილია.

ამგვარად, შენობების მშენებლობის და ექსპლუატაციის უსაფრთხოების უზრუნველყოფის ტექნიკური საფუძველია კონტროლისა და დიაგნოსტიკის საშუალებების დანერგვა. შესრულებული სამეცნიერო კვლევების და ტექნიკური გადაწყვეტილებების დონის შეფასება გვარწმუნებს, რომ დღევანდელ დღეს ახალი თაობის გამზომი სისტემები სამშენებლო ნაგებობების და კონსტრუქციების მრავალფუნქციური კონტროლის საიმედო ორგანიზების საშუალებას იძლევა.

კონტროლის მაღალი სიზუსტის მისაღწევად, სხვა გადამწოდებებისაგან ყველაზე მეტად, ეფექტურობით გამოირჩევა პიეზოკერამიკული გადამწოდებები.

კონსტრუქციების კვლევისთვის და მოწყობილობებში სტატიკური და სტაციონალური დაძაბული-დეფორმირებული მდგომარეობის შესასწავლად ფართოდ გამოიყენება წრფივი დრეკადი და თერმოელექტროდრეკადი სასრული ზომის სხეულის მოდელი.

მასლათამცოდნეობაში და მის ტექნიკურ გამოყენებაში ერთ-ერთი ყველაზე მნიშვნელოვანი მიმართულებას წარმოადგენს თერმოელექტრულად აქტიური მასალების შექმნა და გამოყენება.

თერმოელექტრულად აქტიური მასალა თანამედროვე პიეზოტექნიკის საფუძველს წარმოადგენს და სულ უფრო და უფრო გამოიყენება მიკრო და ნანოტექნოლოგიებში.

ამ მასალის სამრეწველო გამოყენება მოიცავს სხვადასხვა ტიპის პიეზოელექტრულ, პიროელექტრულ და სხვა სახის გადამწოდებებს როგორცაა ჰიდროაკუსტიკა, დონის კონტროლი, მოძრაობის პარამეტრები, შენობების დაცვა, მშენებლობის კონტროლი და ა.შ.

პიეზოელემენტების პრაქტიკული გამოყენების საკითხები მრავალნაირად იყო გამოკვლეული. პიეზოელექტრიკებში პროცესების თეორიული კვლევისა და შესწავლის პროცესში გამოჩნდა მჭიდრო კავშირი გამოყენებითი ინჟინრული ამოცანების ამოხსნასთან. პიეზოელექტრული მასალისაგან დამზადებული ფირფიტების და გარსების ტექნიკური თეორიისათვის დამუშავდა სხვადასხვა ვარიანტები. აგრეთვე პიეზოელემენტში პროცესების ანალიზისთვის გამოიყენება სხვადასხვა მათემატიკური მოდელები. პიეზოელექტრული მოწყობილობების ფუნქციონირება, ასევე მათი კონსტრუირება წარმოშობს ამ მასალებისათვის თერმოელექტროდრეკადობის დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის ამოცანებს.

ამ მიმართულებით არსებული ეფექტური კვლევები შესაძლებელია არსებითად გაუმჯობესდეს დრეკადობის და თერმოელექტროდრეკადობის სასაზღვრო და საკონტაქტო ამოცანების ამოხსნების ახალი მეთოდების დამუშავების, და მათემატიკური მოდელების ახალი თანამედროვე მეთოდების გამოყენების შედეგად, ასევე ახალი პროგრამული კომპლექტების შექმნა და მათი დახმარებით რიცხვითი ექსპერიმენტების ჩატარება, რომელიც ცვლის ძვირადღირებულ ნატურალურ ექსპერიმენტებს.

სასრული სხულებისათვის პირდაპირი და შებრუნებული ამოცანების ამოხსნის მეთოდებს შორის სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებების კლასიკურმა მეთოდმა და მასზე დაფუძნებულმა სასაზღვრო ელემენტების მეთოდის გამოყენებამ, კარგად გაართვა თავი დრეკადობის თეორიაში

იზოტროპიული სხეულებისათვის სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნისას. თუმცა უფრო რთული გარემოსათვის ფუნდამენტალური ამოხსნების მიღება გარკვეულ სიძნელეებს აწყდება. ამიტომ ამ სიძნელეების გადასაღახავად საჭიროა ახალი, ალტერნატიული მეთოდების დამუშავება და წარმოადგენს აქტუალურ ამოცანას. რეალური კონსტრუქციებისთვის სასაზღვრო ინტეგრალურ მეთოდთან ერთად გამოიყენება სასრულ ელემენტთა მეთოდი. ამჟამად უცხოეთში არსებობს მთელი რიგი ასეთი სასრული ელემენტების კომპლექსები, მაგრამ მათი სრული ლიცენზირებული ვერსია იმდენად ძვირია, რომ პრაქტიკულად მიუწვდომელია რიგითი მკვლევარებისათვის.

ამის გამო ასეთი კლასის ამოცანებისათვის ახალი მათემატიკური მოდელის აგება, მათი კვლევა წარმოადგენს საკმაოდ თანამედროვე და მნიშვნელოვან აქტუალურ ამოცანას, რომელსაც განსაკუთრებული ყურადღება აქვს დათმობილი მსოფლიო სამეცნიერო ლიტერატურაში.

ამ მოსაზრებებმა განსაზღვრა სადისერტაციო თემის აქტუალობა და წინამდებარე ნაშრომშიც განხილულია შესაბამისი ამოცანები.

ნაშრომის მიზანი. სადისერტაციო ნაშრომის მიზანს წარმოადგენს დრეკადი პიეზოკერამიკული (ტრანსვერსლური იზოტროპული) ერთგვაროვანი ფილებისათვის სასაზღვრო და საკონტაქტო ამოცანებისათვის ანალიზური ამონახსნების მიღება. ამომხსნელი განტოლებების მიღება და ანალიზი. ფილის დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის მათემატიკური მოდელის აგება და მისი მთლიანი კვლევა. მათემატიკურ მოდელი არის კერძოწარმოებლიანი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა, რომელიც შესაბამისი სასაზღვრო და საკონტაქტო პირობებთან ერთად აღწერს სივრცითი ფილის თერმოელექტროდრეკად წონასწორობას.

სამეცნიერო სიახლე. სადისერტაციო ნაშრომის მეცნიერული სიახლეს წარმოადგენს:

- ფილის დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის მათემატიკური მოდელირება;
- მიღებულია რეგულარული განტოლებები;
- დეკარტის მართკუთხა და ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში სივრცითი ამოცანების ზუსტი ამოხსნა;

- ერთგვაროვანი გეგმაში მართკუთხა ფილისათვის რიცხვითი რეალიზაციის ალგორითმი.

კვლევის მეთოდები დაფუძნებულია ნ. ხომასურიძის იდეებზე და ფურის მეთოდის გამოყენებაზე დრეკადობის თეორიის, თერმოდრეკადობის და ელექტროდრეკადობის თეორიის სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანებისთვის.

სანდოობა. სადისერატაციო ნაშრომი დაფუძნებულია დრეკადობის თეორიის, თერმოდრეკადობის და ელექტროდრეკადობის მკაცრ მათემატიკურ აპარატს; საკვლევი სასაზღვრო და საკონტაქტო ამოცანების კორექტულ დაყვანას მოდიფიცირებულ ამოცანებზე.

ნაშრომის პრაქტიკული მნიშვნელობა. მიღებული შედეგების პრაქტიკული მნიშვნელობა მდგომარეობს დრეკადობის თეორიის და თერმოელექტროდრეკადობის თეორიის ახალი მათემატიკური მოდელების აგებაში და ანალიზური ამონახსნების მიღებაში. სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების ამოხსნის ალგორითმის დამუშავება და რიცხვითი რეალიზაცია.

დაცვაზე გასატანი ძირითადი დებულებები:

- 1) თერმოელექტროდრეკადობის თეორიის ძირითადი კლასიკური განტოლებების დაყვანა მოდიფიცირებული განტოლებებზე;
- 2) კლასიკური და მოდიფიცირებული სასაზღვრო პირობების ტოლფასობა;
- 3) სასაზღვრო ამოცანების ანალიზური ამონახსნების აგება;
- 4) რიცხვითი რეალიზაციისათვის ალგორითმის დამუშავება;

ნაშრომის აპრობაცია. ნაშრომის ძირითადი შედეგები განხილული იყო საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სემინარებზე და საერთაშორისო სიმპოზიუმზე. კერძოდ,

1. საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია. გამოყენებითი ფიზიკის აქტუალური საკითხები. საქართველო, თბილისი, 30 მარტი, 2011.

Д.А.Горгидзе, Л.Г.Кварцхава. Об одной задаче электроупругости для пьезокерамической толстой плиты.

2. საქართველოს მექანიკოსთა კავშირის მეორე ყოველწლიური კონფერენცია. საქართველო, თბილისი, 15-17 დეკემბერი, 2011; 16 იანვარი, 2012.

ზ.სირაძე, დ.გორგიძე, ლ.ქვარცხავა. ელექტროდრეკადობის თეორიის ღერძიმიტრიული ამოცანა ცილინდრისათვის.

3. სტუდენტთა 84-ე საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია. საქართველო, თბილისი, 6 ივნისი-25 ივნისი, 2016.

ლ.ქვარცხავა. სასაზღვრო ამოცანა ელექტროდით დაფარული სასრული ცილინდრული სხეულისათვის.

4. სტუდენტთა 85-ე საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია. საქართველო, თბილისი, 12 ივნისი-1 ივლისი, 2017.

ლ.ქვარცხავა. ცილინდრული პანელის ელექტროდრეკადი წონასწორობა.

გამოქვეყნებული შრომები. დისერტაციის თემაზე გამოქვეყნებულია 5 ნაშრომი.

1. დ.გორგიძე, ლ. ქვარცხავა. *ტრანსვერსალურად-იზოტროპული წრიული სქელი ფილის ღუნვის ამოცანა თერმული ველის გათვალისწინებით.* საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი. გამოყენებითი მექანიკა, შრომათა კრებული, თბილისი, 2010, გვ.106-111;
2. Gorgidze D., Siradze Z., Ramishvili I., Qvarckhava L. *Thermo-electroelasticity Equilibrium Transropic Bodies in a Spherical Coordinate Sistem.* Nova Publishers, 2013, pp.165-176 ;
3. დ. გორგიძე, ლ. ქვარცხავა, ნ. გულუა. *ცილინდრული პანელის ელექტროდრეკადიწონასწორობა.* Georgian Engineering News,2017,v.83,№3.;
4. Л. Кварцхава. *Осесимметричное электроупругое равновесие цилиндрического тела.* Georgian Engineering News,№2, 2020. გვ. 12-14.

სამუშაოს სტრუქტურა და მოცულობა. ნაშრომი შედგება შესავლისა და 3 თავისაგან, შეიცავს 108 ნაბეჭდ გვერდს, 16 ნახაზს, 8 ცხრილს. ლიტერატურის ჩამონათვალი შეიცავს 81 დასახელებას.

დისერტაციის შესავალში წარმოდგენილია ნაშრომის მიზანი, დასაბუთებულია განსახილველი ამოცანების აქტუალობა, მოცემულია ნაშრომის სტრუქტურა და ძირითადი ნაწილების მოკლე შინაარსი.

განვიხილოთ სადისერტაციო ნაშრომი თავების მიხედვით.

პირველ თავის პირველ პარაგრაფში მოცემულია იმ ნაშრომთა კრიტიკული ანალიზი, რომლებიც უშუალოდაა დაკავშირებული დისერტაციაში განხილულ

საკითხებთან. ამავე თავის მეორე პარაგრაფში მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემაში განხილულია ფილის თერმოელექტროდრეკადი წონასწორობა. დრეკადი სხეული არის ტრანსვერსალურად იზოტროპული (ტრანსტროპული სიმეტრიის სიბრტყედ მიღებულია $z = const$ სიბრტყეები). ფილის პარალელეპიპედის ზედა და ქვედა ფუძეებზე ($z = 0$ და $z = z_1$ სიბრტყეებზე) ტემპერატურული და ელექტრული ველთან ერთად მოცემულია ძაბვები ან გადაადგილებები, ან მათი კომბინაცია. ფილის გვერდით ($\rho = \rho_0, \rho = \rho_1, \alpha = \alpha_0, \alpha = \alpha_1$) ზედაპირებზე კი მოცემულია სიმეტრიული ან ანტისიმეტრიული გაგრძელების პირობები. ფენოვანი ფილებისათვის ფენებს შორის კონტაქტი ხდება $z = const$ სიბრტყეების გასწვრივ. ასევე, შესაძლებელია განხილული იყოს შემთხვევა, როდესაც ფილის ($\rho = \rho_0, \rho = \rho_1$) ზედაპირებზე ტემპერატურული და ელექტრული ველთან ერთად მოცემულია ძაბვები, ან გადაადგილებები, ან მათი კომბინაცია. გვერდით ზედაპირებზე კი მოცემულია მესამე ან მეოთხე სასაზღვრო ამოცანის შესაბამისი ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობები. ამ შემთხვევაში, მრავალფენიანი ფილისათვის კონტაქტი ხდება $\rho = const$ ზედაპირების გასწვრივ. თვითოეული ფენა შესაძლებელია იყოს როგორც ტრანსტროპული, ასევე

იზოტროპული.
$$K = c_1 \left[\frac{\partial(Hu)}{\partial\rho} + \frac{\partial(Hv)}{\partial\alpha} \right] + c_3 \frac{\partial w}{\partial z} + e_1 \frac{\partial\phi}{\partial z} - \beta_{10}T, \quad B = c_5 \frac{1}{H^2} \left[\frac{\partial(Hv)}{\partial\rho} - \frac{\partial(Hu)}{\partial\alpha} \right]$$
 ფუნქციების საშუალებით წონასწორობის განტოლებათა სისტემიდან

მიიღება მოდიფიცირებული სისტემა, რომელიც ფიზიკურ განტოლებებთან ერთად ქმნის თერმოელექტროდრეკადი ველის განმსაზღვრელ განტოლებათა სისტემას.

თერმოელექტროდრეკადი ველის ყველა კომპონენტი გამოსახულია u, v, w, ϕ, T, K, B ფუნქციების საშუალებით.

მეორე თავი მთლიანად ეძღვნება გეგმაში მართკუთხა ფილის თერმოელექტროდრეკად წონასწორობას. პირველ პარაგრაფში მიღებულია ძირითადი განტოლებები, განსაზღვრულია სასაზღვრო - საკონტაქტო ამოცანების ის კლასი, რომელსაც შევისწავლით ამ თავში. მიღებულია ზოგადი ამონახსნები დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში. ჩამოყალიბებულია რეგულარული ამოხსნის განსაზღვრება. მეორე

პარაგრაფში ამოხსნილია სასაზღვრო ამოცანა მართკუთხა ფილისათვის, ხოლო მესამე პარაგრაფში განხილულია ელექტროდრეკადი წონასწორობა მართკუთხა ფილისათვის.

მესამე თავში წრიულ ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში

$r, \alpha, z (0 \leq r < \infty, 0 < \alpha < 2\pi, -\infty < z < \infty)$ განიხილება ცილინდრული ფილის თერმoeლექტროდრეკადი წონასწორობა. უფრო ზუსტად, აღნიშნული თერმoeლექტროდრეკადობის წონასწორობის სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანები ყალიბდება როგორც თერმoeლექტროდრეკადობის უჩვეულო (არაორდინარული) ამოცანების მათემატიკური მოდელი. უჩვეულობა გამოწვეულია არის, ფილის მასალის და სასაზღვრო თუ საკონტაქტო პირობების უჩვეულობით, რადგან გადაადგილების ვექტორის განსაზღვრის არე შეიძლება იყოს მთლიანი ცილინდრული ფილა (ხშირად ამბობენ ცილინდრული სარტყელი) $\Omega = (r_0 < r < r_1, 0 \leq \alpha < 2\pi, 0 < z < z_1)$,

ცილინდრული ფილა ჭრილით $\Omega = (r_0 \leq r < r_1, 0 < \alpha < \alpha_1 < 2\pi, 0 < z < z_1)$,

სოლისებური ფილა $\Omega = (0 \leq r < r_1, 0 \leq \alpha < \alpha_1, 0 < z < z_1)$ და ა.შ., ხოლო თავად

ფილა ან ტრანსტროპული, ან სუსტად ტრანსტროპული მასალისაა. აღნიშნული ფილების $z = const$ ზედაპირზე შეიძლება სრულდებოდეს ოთხი ძირითადი სასაზღვრო პირობა. $r = const$ ზედაპირებზე $u = 0, S_{zr} = 0, B = 0,$

$D_r = 0, \frac{\partial T}{\partial r} = 0$ ან $v^k = 0, w^k = 0, \tilde{K}^k = 0, \phi^k = 0, T^k = 0$; $\alpha = const$ ზედაპირებზე

სიმეტრიის $v^k = 0, S_{zr}^k = 0, S_{z\alpha}^k = 0, D_r^k = 0, \frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0$

ან $S_{\alpha z}^k = 0, u^k = 0, w^k = 0, T^k = 0, \phi^k = 0$ ანტიმეტრიის პირობებია მოცემული.

ამასთან u, v, w გადაადგილების ვექტორის კომპონენტებია, სათანადოდ r -ის, α -სადმი მხების და z -ის გასწვრივ. $N_r, N_\alpha, N_z, S_{r\alpha}, S_{rz}, S_{\alpha z}$ -

ნორმალური და მხები ძაბვებია; აღვნიშნოთ, რომ $r = const$ მოცემული

ზედაპირზე მოცემული პირობები ანალოგიურია, სათანადოდ, სიმეტრიის და ანტიმეტრიის პირობებისა.

ნაშრომში განხილული თერმოელექტროდრეკადობის თეორიის სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანათა კლასისათვის მიღებული ზოგადი ამონახსნის და ცვლადთა განცალების მეთოდის გამოყენებით ზემოთ აღნიშნული ამოცანების ამოსახსნელად მივიღებთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას საძიებელი კოეფიციენტებისათვის. კოეფიციენტების განსაზღვრის შემდეგ, გადაადგილების ვექტორის და ძაბვის ტენზორის კომპონენტები წარმოიდგინება ექსპონენციალურად კრებადი მწკრივების საშუალებით. მწკრივების შესაკრებები წარმოადგენენ ექსპონენციალური (z -ის მიმართ), ტრიგონომეტრიული (α - ის მიმართ) და ბესელის (r - ის მიმართ) ფუნქციების ნამრავლს.

დასკვნაში მოყვანილია ნაშრომის ძირითადი შედეგები.

თავი 1. მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემაში პიეზოელემენტებისათვის ბაზური

მათემატიკური მოდელის აგება

1.1 ზოგადი მიმოხილვა

როული საინჟინრო ნაგებობების საიმედოობა და უსაფრთხოება, მშენებლობისას (რეკონსტრუქციის) და მზიდი კონსტრუქციების ტექნიკური მდგომარეობა, შენობებისა და ნაგებობების სამშენებლო კონსტრუქციების საიმედო და უსაფრთხო მუშაობა შეიძლება უზრუნველყოფილი იყოს სწორი და დროული ტექნიკური დიაგნოსტიკით, სამშენებლო ობიექტების სასიცოცხლო ციკლის ყველა სტადიაზე კონტროლის თანამედროვე მეთოდებისა და საშუალებების გამოყენებით, რათა მათი უსაფრთხო ექსპლუატაციის რესურსი საიმედოდ იყოს გათვლილი.

ამ პრობლემიდან ერთ-ერთი ყველაზე ეფექტური გამოსავალი სამშენებლო მონიტორინგის სისტემების დანერგვაა, რაც უზრუნველყოფს კონსტრუქციულ-ტექნოლოგიური გავლენის, ექსპლუატაციური და ბუნებრივ-ტექნოგენური ზემოქმედების შედეგად, შენობის ნგრევის შესაძლებლობის ადრეულ გამოვლენას. ასეთი სისტემების გამოყენება ასახავს პერიოდული კონტროლიდან, სამშენებლო უბნების, როული ავტომატური სისტემების გამოყენებით, მუდმივ მონიტორინგზე გადასვლის გლობალურ ტენდენციას. აღნიშნული გადაწყვეტილების მიღების აუცილებლობა განპირობებულია, პირველ რიგში, საექსპლუატაციო დეფექტების ზრდის მაღალი ტემპებით. და, როგორც შედეგი, დეფექტის წარმოშობის მომენტიდან სრულ განადგურებამდე შედარებით მოკლე პერიოდით.

ამგვარად, მონიტორინგის მიზანია გრძელვადიანი პერიოდული კონტროლი დატვირთვების, ზემოქმედების, ძალების, გადაადგილებების, კონსტრუქციის დეფორმაციის, კვეთებში ძაბვების; კონსტრუქციის რეალური დამაბული-დეფორმირებული მდგომარეობის შედარება სამუშაო პროექტის გაანგარიშებებთან, ობიექტის ტექნიკური მდგომარეობის შესაფასებლად და კრიტიკული და წინა საავარიო მდგომარეობის წინმსწრები გამოვლენა.

როგორც ვხედავთ, შენობების მშენებლობის და ექსპლუატაციის უსაფრთხოების უზრუნველყოფის ტექნიკური საფუძველია კონტროლისა და დიაგნოსტიკის საშუალებების დანერგვა. შესრულებული სამეცნიერო კვლევების

და ტექნიკური გადაწყვეტილებების დონის შეფასება გვარწმუნებს, რომ დღევანდელ დღეს ახალი თაობის გამზომი სისტემები სამშენებლო ნაგებობების და კონსტრუქციების მრავალფუნქციური კონტროლის საიმედო ორგანიზების საშუალებას იძლევა.

კონტროლის მაღალი სიზუსტის მისაღწევად, სხვა გადამწოდებებისაგან ყველაზე მეტად, ეფექტურობით გამოირჩევა პიეზოკერამიკული გადამწოდებები.

კონსტრუქციების კვლევისთვის და მოწყობილობებში სტატიკური და სტაციონალური დაძაბული-დეფორმირებული მდგომარეობის შესასწავლად ფართოდ გამოიყენება წრფივი დრეკადი და თერმოელექტროდრეკადი სასრული ზომის სხეულის მოდელი.

თერმოელექტრულად აქტიური მასალა თანამედროვე პიეზოტექნიკის საფუძველს წარმოადგენს და სულ უფრო და უფრო გამოიყენება მიკრო და ნანოტექნოლოგიებში.

ამ მასალის სამრეწველო გამოყენება მოიცავს სხვადასხვა ტიპის პიეზოელექტრულ, პიროელექტრულ და სხვა სახის გადამწოდებებს როგორცაა ჰიდროაკუსტიკა, დონის კონტროლი, მოძრაობის პარამეტრები, შენობების დაცვა, მშენებლობის კონტროლი და ა.შ.

პიეზოელექტრული მოწყობილობების ფუნქციონირება, ასევე მათი კონსტრუირება წარმოშობს ამ მასალებისათვის თერმოელექტროდრეკადობის დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის განსაზღვრის ამოცანას.

პიეზოელემენტების პრაქტიკული გამოყენების საკითხები მრავალნაირად იყო გამოკვლეული და ძირითადად პიეზოელექტრიკებში პროცესების გამოსაკვლევად გამარტივებულ მიდგომებს ეყრდნობოდა. თუმცა უნდა აღინიშნოს, რომ თეორიული კვლევისა და შესწავლის პროცესში გამოჩნდა მჭიდრო კავშირი გამოყენებითი ინჟინრული ამოცანების ამოხსნასთან. ვითარდებოდა მათემატიკური მეთოდებიც პიეზოელემენტში პროცესების ანალიზისთვის, რომელიც დაფუძნებულია თერმოელექტროდრეკადობის თეორიის ძირითად დებულებებზე. დამუშავდა პიეზოელექტრული მასალისაგან დამზადებული ფირფიტების და გარსების ტექნიკური თეორიის სხვადასხვა ვარიანტები.

ამ მიმართულებით არსებული ეფექტური კვლევები შესაძლებელია არსებითად გაუმჯობესდეს დრეკადობის და თერმოელექტროდრეკადობის სასაზღვრო და საკონტაქტო ამოცანების ამოხსნების ახალი მეთოდების დამუშავების, და მათემატიკური მოდელების ახალი თანამედროვე მეთოდების გამოყენების შედეგად, ასევე ახალი პროგრამული კომპლექტების შექმნა და მათი დახმარებით რიცხვითი ექსპერიმენტების ჩატარება, რომელიც ცვლის ძვირადღირებულ ნატურალურ ექსპერიმენტებს.

პირდაპირი და შებრუნებული ამოცანების ამოხსნის მეთოდებს შორის სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებების კლასიკურმა მეთოდმა და მასზე დაფუძნებულმა სასაზღვრო ელემენტების მეთოდის გამოყენებამ, კარგად გაართვა თავი დრეკადობის თეორიაში იზოტროპიული სხეულებისათვის სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნისას. თუმცა უფრო რთული გარემოსათვის ფუნდამენტალური ამოხსნების მიღება გარკვეულ სიძნელეებს აწყდება. ამიტომ ამის გადასაღწევად საჭიროა ახალი, ალტერნატიული მეთოდების დამუშავება და წარმოადგენს აქტუალურ ამოცანას.

რეალური კონსტრუქციებისთვის სასაზღვრო ინტეგრალურ მეთოდთან ერთად გამოიყენება სასრულ ელემენტთა მეთოდი. ამჟამად უცხოეთში არსებობს მთელი რიგი ასეთი სასრული ელემენტების კომპლექსები, მაგრამ მათი სრული ლიცენზირებული ვერსია იმდენად ძვირია, რომ პრაქტიკულად მიუწვდომელია რიგითი მკვლევარებისათვის.

ამის გამო ასეთი კლასის ამოცანებისათვის ახალი მათემატიკური მოდელების აგება, მათი კვლევა წარმოადგენს საკმაოდ თანამედროვე და მნიშვნელოვან აქტუალურ ამოცანას, რომელსაც განსაკუთრებული ყურადღება აქვს დათმობილი მსოფლიო სამეცნიერო ლიტერატურაში.

ბოლო წლებში შეიმჩნევა სულ უფრო მზარდი ინტერესი ანიზოტროპული დრეკადი გარემოს მოდელების მიმართ, რომლებიც სხვადასხვა ფიზიკური ველების (მექანიკური, თერმული, ელექტრული, მაგნიტური და ა.შ.) ურთიერთ გავლენას ითვალისწინებენ.

ამ კვლევების ძლიერი მოტივაციაა არასტანდარტული თვისებების მქონე ახალი ხელოვნური მასალების შექმნა. მათ შორის უნდა დავასახელოთ

პიეზოელექტრული მასალები, რომლებიც თანამედროვე კონსტრუქციების და მოწყობილობების საფუძველს წარმოადგენენ.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, პიეზოელემენტში პროცესების ანალიზისთვის ფართოდ გამოიყენება თერმოელექტროდრეკადობის თეორიის მეთოდები. ამიტომ შეძლებისამებრ შევეცდებით განვიხილოთ დრეკადობის თეორიის, თერმოდრეკადობის და ელექტროდრეკადობის თეორიის განვითარების ძირითადი, ისტორიული ეტაპები, რადგან თუ გავითვალისწინებთ, რომ ამ მიმართულებით ბოლო რვა ათეული წლის მანძილზე ყოველწლიურად საშუალოდ ათასი სამეცნიერო სტატია იბეჭდებოდა. ეს იმას მოწმობს, რომ თემატიკა დიდი პოპულარობით სარგებლობდა მექანიკოსების, მათემატიკოსების და ინჟინერ მკვლევარებს შორის. ამიტომ ცხადია, რომ შევეხებით მხოლოდ არსებით ნიშან-სვეტებს, რომლებმაც არსებითი როლი შეასრულეს ამ თემატიკის განვითარებაში.

XIX საუკუნის 20- 40-იან წლებში ბრწყინვალე მეცნიერთა (ნავიე, კოში, პუასონი, ლამე, გრინი და სხვ.) თაობის ძალისხმევით თითქმის დასრულდა წრფივი დრეკადობის თეორია, როგორც მყარ სხეულში მექანიკური ბუნების გარე ძალების მიერ წარმოშობილი ძაბვებისა და დეფორმაციები ველის მათემატიკური მოდელი.

1822 წელს ჟან ბატისტ ფურიე აქვეყნებს ნაშრომს „სითბოს ანალიზური თეორია“ [1], რომელმაც მნიშვნელოვანი როლი შეასრულა მათემატიკის განვითარების ისტორიაში. ნაშრომში ფურიემ გამოიყვანა სითბოგამტარობის განტოლება და განავითარა განტოლების ამოხსნის იდეა ცვლადთა განცალების მეთოდით. ამ მეთოდმა განვითარება მიიღო ს. პუასონის, მ.ვ. ოსტროგრადსკის და სხვათა შრომებში. ცვლადთა განცალების მეთოდს ანუ ფურიეს მეთოდს ჩვენ ქვემოთ კიდევ დავუბრუნდებით. 1852 წელს გაბრიელ ლამეს ავტორობით დაიბეჭდა პირველ კურსი დრეკადობის თეორიაში [2].

XX საუკუნის 30-იანი წლებისთვის დრეკადობის თეორიამ თითქმის უკვე დასრულებული სახე მიიღო. ამავე საუკუნის 50-იანი წლებისთვის დრეკადობის ბრტყელი თეორია, ნ. მუსხელიშვილის ბრწყინვალე შრომების შედეგად, რომელიც თავმოყრილია მის მონოგრაფიაში [3], დასრულებულ სამეცნიერო დისციპლინად ჩამოყალიბდა. ამჟამად, მრავალი მექანიკოსის, მათემატიკოსის და ინჟინერ

მკვლევარების მეოხობით დრეკადობის თეორია იზოტროპული გარემოსთვის მთლიანად და ყოველმხრივად დამუშავებული [4]- [14].

ბოლო დროს თერმოდრეკადობის თეორია მნიშვნელოვნად განვითარდა, იმ პრობლემების გამო, რომლებიც წარმოიშვა ახალი ორთქლისა და გაზის ტურბინების, რეაქტიული და სარაკეტო ძრავების, მაღალსიჩქარიანი თვითმფრინავების, ბირთვული რეაქტორების და სხვა ახალი კონსტრუქციების დამუშავებისას. ზოგადად, ამ კონსტრუქციის ელემენტები მუშაობენ არასტაციონალური, არათანაბარ სითბურ პირობებში. ამ დროს იცვლება მასალის ფიზიკურ-მექანიკური თვისებები და წარმოიქმნება ტემპერატურული გრადიენტები, რომელსაც თან ახლავს ელემენტების ნაწილების არათანაბარი ტემპერატურული გათბობა.

თერმოდრეკადობის თეორიის ერთ-ერთმა ფუძემდებელმა, ინგლისელმა ფიზიკოსმა დუჰამელმა 1832 წელს ტემპერატურული გრადიენტის გათვალისწინებით მიიღო დრეკადი სხეულის დეფორმაციის განტოლება [15]. ცოტა მოგვიანებით, 1841 წელს იგივე შედეგი მიიღო ნეიმანმა [16]. დუჰამელი-ნეიმანის თეორია დაფუძნებულია მექანიკური და სითბური ეფექტების ურთიერთ დამოუკიდებლობაზე. მათი თეორიით სრული დეფორმაცია დრეკადი დეფორმაციის და სითბური დეფორმაციის ჯამის ტოლია.

ზოგად შემთხვევაში არათანაბარი თერმული გაფართოება უწყვეტ სხეულში თავისუფალად არ შეიძლება მოხდეს. ის იწვევს სითბურ (თერმული, ტემპერატურული) ძაბვებს. სითბური ძაბვის სიდიდისა და მოქმედების ხასიათის ცოდნა კი აუცილებელი პირობაა კონსტრუქციის სიმტკიცის ყოვლისმომცველი ანალიზის დროს.

თერმულმა ძაბვებმა, გარე ძალების მოქმედებით გამოწვეულ მექანიკურ ძაბვებთან ერთად შეიძლება გამოიწვიოს მყიფე მასალისაგან დამზადებულ კონსტრუქციებში ბზარების გაჩენა და კონსტრუქციის მსხვრევა, არასტაციონალური ტემპერატურული ველის მოქმედებით, მკვეთრად წარმოქმნილი თერმული ძაბვების მოქმედებით ზოგიერთი მასალა ხდება მყიფე და ვერ უძლებს თერმულ დარტყმას. თერმული ძაბვების განმეორებითი მოქმედებისას კი თერმული დაღლილობის შედეგად ხდება კონსტრუქციის ელემენტის რღვევა.

ასევე თერმული ძაბვების მოქმედებამ შეიძლება გაჩნდეს მნიშვნელოვანი პლასტიკური დეფორმაციები, რამაც შეიძლება კონსტრუქციის სრული ან პროგრესირებადი რღვევა გამოიწვიოს. და ა.შ.

თერმოდრეკადობასთან კვლევები თავიდანვე დაკავშირებული იყო კონსტრუქციის ელემენტებში თერმოდაბვების ამოცანებთან. მათი ამოხსნა ხდებოდა დუჰამელი - ნეიმანის მიერ დამუშავებული თეორიის გამოყენებით. ამ თეორიის თანახმად, მთლიანი დეფორმაცია შეიძლება წარმოდგენილი იქნას ორი შესაკრების ჯამის სახით: პირველი არის დრეკადი დეფორმაციები გამოსახული ჩველულებრივი დამოკიდებულებებით ძაბვებთან და მეორე – თბოგამტარობის კლასიკური თეორიიდან ცნობილი წმინდა სითბური გაფართოება.

არასტაციონალური სითბური და მექანიკური ზემოქმედებებისთვის დუჰამელი-ნეიმანის თეორია შეზღუდული თეორია, რადგან არ იძლევა იმის საშუალებას რომ მკაცრად აღიწეროს დრეკადი სხეულის მოძრაობა, რომელიც დაკავშირებულია მის თერმულ მდგომარეობასთან. გარკვეულ პირობებში არასტაციონალურ თბურ მდგომარეობას კონსტრუქციაში თან ახლავს დინამიკური ეფექტები.

ლორდ კელვინი (ტომსონი) [17] იყო პირველი (1855 წელი), რომელმაც გამოიყენა თერმოდინამიკის ძირითადი კანონები დრეკადი სხეულის თვისებების შესასწავლად. მისმა მიმდევარმა მკველვარებმა ლ.დ. ლანდაუ და ე.მ. ლიფშიცმა (1953) [18] და სხვებმა კლასიკური თერმოდინამიკის მეთოდებისა გამოყენებით მიიღეს თერმოდრეკადობის განტოლებები. თუმცა კლასიკური თერმოდინამიკის ფარგლებში, მკაცრი ანალიზი სამართლიანია მხოლოდ დეფორმაციის იზოთერმული და ადიბატიური შექცევადი პროცესებისათვის. დეფორმაციის რეალური პროცესი, რომელიც უწყვეტად დაკავშირებულია სითბოს გამტარობის შეუქცევად პროცესთან ზოგადად შეუქცევადია. ბოლო წლებში თერმოდინამიკის შეუქცევადი პროცესების შემუშავებამ მკაცრად დააყენა საკითხი ზოგად შემთხვევაში შეუქცევადი დეფორმაციის მექანიკური და თერმული პროცესების ერთიანი ინტერპრეტაციის შესახებ, რაც აისახა ბიოს (1956)[19], ჩედვიკის (1960)[20], ბოლი და უეინერის (1960) [21] და სხვათა ნაშრომებში. მათ მკაფიოდ განსაზღვრეს თერმოდრეკადობის თეორია, სადაც კლასიკური დრეკადობის თეორია და სითბოს გამტარობის თეორია დაკავშირეს. ისინი მოიცავენ შემდეგ

მოვლენებს: სხეულში სითბოს გადატანა, სხეულსა და გარემოს შორის არასტაციონალურ და სტაციონალურ სითბოს გაცვლის დროს, ტემპერატურის გრადიენტებით გამოწვეულია სითბურ ძაბვებს, გათბობის არასტაციონალური პროცესის დროს წარმოსობილ დინამიკური ეფექტებს. კერძოდ, თხელკედლიანი კონსტრუქციების თერმოდრეკადი რხევები თერმული დარტყმის დროს, რომელიც გამოწვეულია დეფორმაციის თერმომექანიკური და ტემპერატურული ველების ურთიერთქმედებით.

თერმომექანიკის მათემატიკურ მოდელებში უწყვეტ გარემოში სითბოს გავრცელების სხვადასხვა მეთოდს განიხილავენ. მიღებულია, რომ სითბოს გავრცელება შეიძლება ხდებოდეს სითბოს გამტარიანობის ხარჯზე. (სითბოს გადაცემა ხდება თავად ნივთიერების ხარჯზე), კონვექცია (სითბოს გადაცემა ხდება გამთბარი სხეულის ნაწილაკების ფარდობითი მოძრაობით) და გამოსხივება (სითბოს გადატანა ხდება ელექტრომაგნიტური გამოსხივებისას). როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, თბოგამტარობის მათემატიკური მოდელი პირველად შემუშავებული იყო XIX საუკუნეში ს. დუჰამელის და გ. ლამეს ნაშრომებში. თერმოგამტარობის მეთოდები განხილულია ა.ბ. ლიკოვის [22] გ. კარსლოუ, დ. ეგერის [23] ნაშრომებში. სხეულში განაწილებული და წერტილოვანი წყაროების არსებობისას, სითბო თბოგამტარობის მეშვეობით ვრცელდება. სითბოს გავრცელებას ყოველთვის თან ახლავს სხეულში დეფორმაციების, ძაბვების, და შესაძლებელია ელექტრომაგნიტური ველის გაჩენა. სხეულის დამაბულ-დეფორმირებული გამოკვლევა დეფორმაციების, ძაბვების და ტემპერატურის, აგრეთვე ელექტრომაგნიტური ველის გათვალისწინებით, თერმომექანიკის თანამედროვე მოდელების საფუძველს წარმოადგენს. დამუშავებულია ამ ამოცანების გადაწყვეტის მათემატიკური მოდელები. მოკლედ შევჩერდებით ზოგიერთ ამ მოდელსა და მეთოდებზე.

როგორც უკვე ვთქვით, პირველად ტომსონმა გამოიყენა თერმოდინამიკის ზოგადი კანონები სხეულის თერმოდრეკადობის თვისებების შესასწავლად და შემდეგ განავითარეს ნ.ნ. შილერმა [24], თ.ა. კარატეოდორმა [25], აფანასიევა-ერენფესტის [26] და სხვებმა თავიანთ ნაშრომებში. ამ შემთხვევაში მიღებული მოდელი იყო დინამიკური და ბმული, რადგან თბოგამტარობის განტოლებებში და მოძრაობის განტოლებებში გათვალისწინებული იყო სითბური დეფორმაციის

და ინერციული წევრები. ბმული თერმოდრეკადობის თეორიის ამოცანებს ამოხსნის ირგვლივ მრავალი ნაშრომია გამოქვეყნებული. მათ შორის აღვნიშნავთ ვ.ნოვაცკი [27], ვ.გ.კარნაუხოვა [28], ო.პ. ერვინიკო, ი.კ. სენჩენკოვა, ე.ვ. დოლი [29], ლ.ა. ფილშტინკი, ი.ვ. სირენკო [30], შ. ზაზაშვილის [31], ნ. კახნიაშვილის [32], [33] და სხვანი.

სხეულის თერმოდრეკადი მდგომარეობა არის განაწილებული ტემპერატურული ველების შედეგი. ასეთი ამოცანის ზოგადი ამოხსნა პრაქტიკულად მოსახერხებელ ფორმაში წარმოდგენილია პ.ფ. პაპკოვიჩის [34], [35] ნაშრომებში. ამასთან ვექტორის გადააგილების ერთგვაროვანი განტოლებების ამოხსნა მოიცავს ვექტორს და სკალარს, რომლიც ნებისმიერია, ხოლო ზოგადი ამოხსნა შეესაბამება არაერთგვაროვან განტოლებას. იზოტროპული სხეულებისათვის არაბმული თერმოდრეკადობის ამოცანების განხილვა პირველად დაიწყო ნ.ნ. ლებედევმა [36], ხოლო ანიზოტროპული სხეულისათვის კი ი.ა. პრუსოვმა [37], ა. ი. უზდალენოვმა [38].

თერმოდრეკადობის წრფივ თეორიაშია მიღებულია რომ მაქსიმალური ტემპერატურული ცვლილება მცირეა საწყისი აბსოლუტურული ტემპერატურის მიმართ. მაღალი ტემპერატურის დროს მცირე დეფორმაციის დროს მივყავართ იქამდე, რომ გათვალისწინებული უნდა იყოს თერმოდრეკადობის განტოლებებში არაწრფივი ელემენტები, რომლებიც დამოკიდებული არიან ტემპერატურით გამოწვეულ სხეულის სითბურ და დრეკად თვისებებზე.

მცირე დეფორმაციის დროს აგებულია თბოგამტარობისა და თერმოდრეკადობის თეორიების მოდელები, რომლებიც ითვალისწინებენ მასალის სითბურ და დრეკადობის თვისებების ტემპერატურაზე დამოკიდებულებას განსაკუთრებით თბოგამტარობის და თერმოდრეკადობის თეორია ფართოდ განვითარდა ბზარებით და ხვრეტებით შესუსტებული იზოტროპული ფილებისა და გარსებისათვის. ასეთი ამოცანების ამოხსნისათვის გამოიყენებოდა კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა მეთოდი, სინგულარული ინტეგრალური განტოლებები, გრინის ფუნქციები, მცირე პარამეტრების მეთოდი, ინტეგრალური გარდაქმნები, ასიმპტომური მეთოდები, სასრული ელემენტების მეთოდები. აღმოჩნდა, რომ ყველაზე მოსახერხებელი მეთოდია კომპლექსურ პოტენციალთა მეთოდები.

გაფართოებული კვლევები სხეულის თერმოდრეკადი მდგომარეობის შესახებ ჩატარებული იყო ანიზოტროპიული ფირფიტებისათვის, თხელკედლიანი ფილებისა და გარსებისათვის. ეყრდნობოდა რა სხვა გამოკვლევებს ა.ი. უზდალოვმა [39] თბოგამტარობისა და თერმოდინამიკის ბრტყელი ამოცანების ამოსახსნელად შემოიტანა თერმოდრეკადობის განზოგადოებული კომპლექსური პოტენციალი, რომელიც იძლეოდა საშუალებას ამოხსნილი იყოს სხვადასხვა ამოცანები ცალადბმული არეებისთვის. მრავალდბმული ფირფიტებისთვის თერმოდრეკადობის ამოცანების ამოხსნის მეთოდი შემოთავაზებული იყო ს.ა კალოეროვის, ს.ა.კოსმოდემიანსკაის [40] მიერ; მათ მიერ გადაწყვეტილი იყო ამოცანები, როდესაც ხვრეტის კონტურზე მოცემული იყო ტემპერატურის მნიშვნელობა, ხოლო შიგა წერტილებში მოქმედებს სითბოს შეყურსული წყაროები.

ინტეგრალური გარდაქმნების მეთოდების გამოყენებით რ.მ. კუმნერის, ტ.მ. ნიკოლშინის [41], ვ.ა. ოსადჩუკის, ვ.კ.შევჩენკოს, ა.ს. გოლცევის [42] ნაშრომებში ამოხსნილია თერმოდრეკადობის ამოცანები ორთოტროპული გარსებისა და ფილებისათვის.

მრავალი შრომა მიეძღვნა მრავალფენიანი სხეულისათვის თერმოდრეკადობის თეორიის სასაზღვრო - საკონტაქტო ამოცანებს. აქ უნდა აღინიშნოს ა.ა. ილუშინის, ბ.ე. პობედრიას [43], ვ.გ. კარნაუხოვას, ი.კ. სენჩენკოვას, ბ.პ. გუმენიუკის [44], ვ.გ. კარნაუხოვას, ი.ფ. კირიჩოკოს [45], ი.ნ. შევჩენკოს, ი.გ. სავჩენკოს [46] შრომები. თერმოდრეკადობის ამოცანების გამოთვლების თეორია და მეთოდები განხილულია ი.ნ.შევჩენკოს [47-49], ნაშრომებში.

სხეულის თერმოდრეკადობის მდგომარეობის კვლევები, აგრეთვე ორგანზომილებიანი და ბრტყელი ამოცანები. დღესდღეობით სრულად არის დამუშავებული თერმოგამტარობის და თერმოდრეკადობის ამოცანები იზოტროპული და ანიზოტროპული გარემოსათვის. ამ მიდგომასა და ამოხსნას ეძღვნება მთელი რიგი მონოგრაფიები, როგორცაა გ.ს.კიტის, მ.გ. კრივცუნოვის [50], ა.დ. კოვალენკოს [51], ა.ს. კოსმოდემიანსკის, ს.ა.კალოეროვას [52], ნ.ნ. ლებედევას [53], ი.ა.პრუსოვის [54], გ.ნ. სავინის [55] ა.ი.უზდალევის [56], და სხვათა. ამ მეთოდების გამოყენებით ამოხსნილია მთელი რიგი ცალადბმული და მრავალდბმული გარემოსათვის.

ს.ა. კალოეროვას, ი.ს. ანტონოვის [57],[58] ნაშრომებში მოცემულია თერმოდრეკადობისა და თერმოგამტარობის ამოცანები, რომლებიც ამოხსნილია სასრულ და უსასრულო მრავალფენიანი ანიზოტროპული ნახვრეტიანი და ბზარებიანი ფირფიტებისათვის. ამოხსნა აგებულია კომპლექსური ცვლადი ფუნქციისა და სასაზღვრო უმცირესი კვადრატის მეთოდის საშუალებით.

დრეკადობის და თერმოდრეკადობის თეორიის სამგანზომილებიანი მათემატიკური ამოცანები განხილულია ვ. კუპრადის, თ.გეგელიას, მ. ბაშელიევიშვილის, თ. ბურჭულაძის [59] მონოგრაფია ვრცელი ლიტერატურული წყაროთი. თერმოდრეკადობის სამგანზომილებიანი ამოცანები განზოგადებულ ცილინდრულ კოორდინატებში ტრანსვერსალურად-იზოტროპიული სხეულებისათვის ამოხსნილი აქვს ნ.ხომასურიძეს [60]-[65].

ელექტროდრეკადობა. ელექტროდრეკადობა არის საბუნებისმეტყველო მეცნიერების მეცნიერული მიმართულება, რომელიც შეისწავლის კვლევების პრობლემებს, რომელიც არის მეცნიერების ორი კლასიკური მიმართულების შერწყმა: მყარი დეფორმირებული სხეულის მექანიკისა და უწყვეტ გარემოში ელექტროსტატიკის. თვითონ ტერმინი ელექტროდრეკადობა შედარებით ცოტა ხნის წინ გამოჩნდა (1960-იან წლებში), ძირითადად ეს ტერმინი ფართოდ გამოიყენება მყარი დეფორმადი სხეულის მექანიკაში. ფიზიკოსებს შორის უფრო გავრცელებულია ტერმინი პიეზოელექტროობა.

პიეზოეფექტის აღმოჩენის მოკლე ისტორია. პიეზოელექტრული ეფექტი აღმოჩენილი იყო ძმები პიერ და ჟაკ კიურების მიერ 1880 წელს. მათ აღმოაჩინეს, რომ ზოგიერთი დიალექტრიკების კრისტალები (მარილის, კვარცის და სხვა) მექანიკურ მოქმედების იკუმშება, რის შედეგადაც მათ ზედაპირებზე ჩნდება საპირისპირო ნიშნების მქონე ელექტრული მუხტები, ან როგორც ამბობენ, კრისტალში ხდება ინდუქციური პოლარიზაცია, რომელიც ქმნის კრისტალში გარე და შიგა ელექტრულ ველებს. ეს მოვლენა - ელექტრული ველის აღმოცენებას ზეწოლის შედეგად ეწოდა პიეზოელექტრული ეფექტი.

ისმის ასეთი კითხვა იყო: თუ არა ეს აღმოჩენა შემთხვევითი, თუ მას წინ უძღოდა რაიმე მეცნიერული ჰიპოთეზა? მყარი კრისტალური სტრუქტურის მქონე დიალექტრიკის ელექტრონული თვისებების შესწავლისას პიერ კიურიმ ჩამოაყალიბა ზოგადი პრინციპი, რომელსაც კიურის პრინციპს უწოდებენ. ამ

პრინციპის აზრი მდგომარეობს შემდეგში: მოვლენას აქვს სიმეტრიის ყველა ნიშანი, რომელიც აღმოცენდა მათი გამომწვევი მიზეზების გამო. მოვლენის ასიმეტრია წინასწარ განსაზღვრულია გამომწვევი ასიმეტრიით. ვინაიდან საპირისპირო ნიშნის მქონე იონები განლაგებულია კრისტალის უჯრედის წვეროებზე. ნებისმიერი ფორმის კრისტალის მთლიანი მუხტის ჯამი ნულის ტოლია. თუმცა, თუ დადებითი და უარყოფითი მუხტების ცენტრები ერთმანეთს არ ემთხვევა, მაშინ კრისტალის დიპოლარული მომენტი არ არის ნულის ტოლი და მას გააჩნია პოლარიზაცია. თუ კრისტალის დიპოლური მომენტი დეფორმირებულ მდგომარეობაში ნულის ტოლია, მაშინ მექანიკური მოქმედების შედეგად დადებითი და უარყოფითი იონებს შეუძლიათ გადაადგილება ერთმანეთთან მიმართებაში და კრისტალების ზედაპირებზე ჩნდება საპირისპირო ნიშნის მქონე მუხტები. ასეთი გადაადგილების შესაძლებლობა დამოკიდებულია კრისტალის სიმეტრიაზე (ფორმაზე).

დრეკადობისა და ელექტროდრეკადობის თეორიის ძირითადი ცნებები და კავშირები. XIX საუკუნის 20-40 -იან წლებში ბრწყინვალე მეცნიერთა თაობის (ნავიე, კოში, პუასონი, გრინი და სხვ.) ძალისხმევით დასრულდა დრეკადობის წრფივი თეორიის მათემატიკური მოდელის აგება.

XIX საუკუნის მეორე ნახევარში ინგლისელმა მეცნიერმა მაქსველმა [66] მიიღო ელექტროდინამიკის განტოლებები, რომლებიც აღწერს ელექტრომაგნიტური ტალღების გავრცელებას და მიიღო წრფივი ელექტროდრეკადი დიფერენციალური განტოლებების ჩაკეტილი სისტემა. ამავე დროს აშკარა ხდება ამ ურთიერთობით ტერმინი ელექტროდრეკადობის მნიშვნელობა. სხეულის ზედაპირზე არსებული პირობებით (სასაზღვრო პირობები) და მოცემული პირობებით რომლებიც განსაზღვრავენ სხეულის მდგომარეობას ფიქსირებულ დროში t_0 (საწყისი პირობებით) ამ განტოლებების დამატებით მივდივართ საწყის სასაზღვრო ამოცანებთან, რომლებიც წარმოადგენენ ერთ-ერთ მათემატიკური მოდელირებას ელექტროდრეკადობის სფეროში.

პიეზოკერამიკა. პიზოელექტრული ეფექტის პირველი ტექნიკური გამოყენება განხორციელდა ლანჟევინის მიერ. 1920 წელს მან შექმნა ულტრაბგერითი გადამწოდებები წყალში ინფორმაციის მიღებისა და გადაცემისათვის და

წარმოადგენენ თანამედროვე ულტრაბგერით გამოსხივების პირველსახეობას. გამოიყენება წყალქვეშა ნავების, თევზის გუნდის აღმოსაჩენად და სხვა.

დასკვნა. ამჟამად შეიძლება გამოვყოთ ელექტროდრეკადობის განვითარების ორი მიმართულება: პირველი მიმართულება დაკავშირებულია ახალი მასალების შექმნასთან, მათ შორის კომპოზიტიური და მათი თვისებების პროგნოზირებასთან, მეორე მიმართულება კი სხვადასხვა დანიშნულების გადამწოდების მათემატიკურ მოდელირების სრულყოფასთან. ამ პრობლემის გადასაწვეტად გამოიყენება სივრცითი ელექტროდრეკადობის თეორია, რომლის მათემატიკურ მოდელია კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა. მათ ამოსახსნელად, როგორც წესი, გამოიყენება სხვადასხვა გამოყენებითი თეორიები, სხვადასხვა კინემატიკური ჰიპოთეზები და დაშვებები პიეზოკერამიკულ ფილაში მექანიკური და ელექტრული ძაბვების განაწილების შესახებ [66-72]. ასევე ეგემებისათვის იქმნებოდა პროგრამული პაკეტები.

1.2. პიეზოკერამიკული გარემოს თერმოელექტროდრეკადობის თეორიის განტოლებების სრული სისტემა

1.2.1. ρ, α, z განზოგადებულ ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში (ρ, α - ორთგონალური კოორდინატთა სისტემა სიბრტყეზე, ხოლო z წრფივი კოორდინატია) ფილას უკავია $\bar{\Omega} = \{(\rho, \alpha, z) \in R : \rho_0 < \rho < \rho_1; \alpha_0 < \alpha < \alpha_1; 0 < z < z_1\}$ არე. x, y - დეკარტის კოორდინატებია, მაშინ განზოგადებულ ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში ლამეს პარამეტრებია [75]:

$$H_\rho = H_\alpha = H = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2}, \quad H_z = 1,$$

და

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} - \frac{\partial y}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial y}{\partial \rho} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial \alpha} \right) = 0,$$

თერმოელექტროდრეკადობის თეორიის განტოლებათა სრულ სისტემას მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემაში შემდეგი სახე აქვს [65], [71]:

A. წონასწორობის განტოლებები:

$$\begin{aligned}
a) \quad & \frac{\partial(HS_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{H} \frac{\partial(H^2S_{\rho\alpha})}{\partial\alpha} + H^2 \frac{\partial S_{\rho z}}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial\rho} N_\alpha = 0, \\
b) \quad & \frac{\partial(HN_\alpha)}{\partial\alpha} + H^2 \frac{\partial S_{\alpha z}}{\partial z} + \frac{1}{H} \frac{\partial(H^2S_{\alpha\rho})}{\partial\rho} - \frac{\partial H}{\partial\alpha} N_\rho = 0, \\
c) \quad & H^2 \frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{\partial(HS_{\rho z})}{\partial\rho} + \frac{\partial(HS_{z\alpha})}{\partial\alpha} = 0,
\end{aligned} \tag{1.1}$$

B. ელექტროსტატიკის განტოლება:

$$\frac{1}{H^2} \frac{\partial(HD_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial(HD_\alpha)}{\partial z} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0. \tag{1.2}$$

აქ $N_\rho, N_\alpha, N_z, S_{\rho\alpha}, S_{\rho z}, S_{\alpha z}$ - ძაბვის სიმეტრიული ტენზორის კომპონენტებია. ρ, α, z განზოგადებულ ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში ელექტრული \vec{D} ინდუქციის ვექტორის მდგენელები აღნიშნულია D_ρ, D_α, D_z (ცხადია, ისინი მიმართული არიან შესაბამისი საკოორდინატო წირების მხებების გასწვრივ.)

C. მდგომარეობის განტოლებები [69] ანუ

$$\begin{aligned}
N_\rho &= c_1 \varepsilon_{\rho\rho} + (c_1 - 2c_5) \varepsilon_{\alpha\alpha} + c_3 \varepsilon_{zz} - e_1 E_z - \beta_{10} T, \\
N_\alpha &= (c_1 - 2c_5) \varepsilon_{\rho\rho} + c_1 \varepsilon_{\alpha\alpha} + c_3 \varepsilon_{zz} - e_1 E_z - \beta_{10} T, \\
N_z &= c_3 (\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\alpha\alpha}) + c_2 \varepsilon_{zz} - e_2 E_z - \beta_{20} T,
\end{aligned} \tag{1.3}$$

$$S_{\alpha z} = c_4 \varepsilon_{\alpha z} - e_3 E_\alpha, \quad S_{\rho z} = c_4 \varepsilon_{\rho z} - e_3 E_\rho, \quad S_{\rho\alpha} = c_5 \varepsilon_{\rho\alpha},$$

$$D_\rho = e_3 \varepsilon_{\rho z} + \vartheta_1 E_\rho, \quad D_\alpha = e_3 \varepsilon_{\alpha z} + \vartheta_1 E_\alpha,$$

$$D_z = e_1 (\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\alpha\alpha}) + e_2 \varepsilon_{zz} + \vartheta_2 E_z.$$

$$\varepsilon_{\rho\rho}, \varepsilon_{\alpha\alpha}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\rho\alpha} = \varepsilon_{\alpha\rho}, \varepsilon_{\rho z} = \varepsilon_{z\rho}, \varepsilon_{z\alpha} = \varepsilon_{\alpha z} - \text{დეფორმაციის}$$

სიმეტრიული ტენზორის კომპონენტებია; E_ρ, E_z, E_α - ელექტრული \vec{E} ველის ვექტორის კომპონენტებია და ელექტრული პოტენციალით ასე გამოისახება: $\vec{E} = - \text{grad } \varphi$ [66,69]. $C(i=1, 2, 3, 4, 5)$ - დრეკადობის კოეფიციენტები, გაზომილი მუდმივი ელექტრული ველისას; სამი $e_j, (j=1, 2, 3)$ პიეზომოდული; ორი ϑ_1, ϑ_2 დიელექტრული შეღწევადობის, გაზომილი მუდმივი დეფორმაციის დროს;

$\beta_{10} = [2(c_1 - c_5) \beta_1 + c_3 \beta_3]$, $\beta_{20} = [2c_3 \beta_1 + c_2 \beta_2]$ β_1, β_2 - იზოტროპიის სიბრტყეში და z ღერძის გასწვრივ წრფივი სითბური გაფართოების კოეფიციენტებია [67]. ფილაში T ტემპერატურის განსაზღვრისათვის გვაქვს განტოლება

$$\Delta_2 T + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (1.4)$$

შესაბამისი სასაზღვრო პირობებით. λ_1 და λ_2 - სითბოგამტარებლობის კოეფიციენტებია იზოტროპიის სიბრტყეში და z - გასწვრივ;

$$\Delta_2 = \frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) ;$$

D. კოშის თანაფარდობები ანუ დამოკიდებულებები გადაადგილებებსა და დეფორმაციებს შორის:

$$\varepsilon_{\rho\rho} = \frac{\partial(Hu)}{\partial\rho}, \quad \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{\partial(Hv)}{\partial\alpha}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial(Hw)}{\partial z}, \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_{\alpha z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{H} \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \quad \varepsilon_{\rho z} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{H} \frac{\partial w}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{\rho\alpha} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{v}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u}{H} \right)$$

სადაც u, v, w - გადაადგილების \vec{U} ვექტორის კომპონენტებია ρ, α, z განზოგადებულ კოორდინატთა სისტემის საკოორდინატო წირების მხებების გასწვრივ.

(1.3) და (1.5) ფორმულების გათვალისწინებით (1.1) სისტემას შეგვიძლია მივცეთ შემდეგი სახე [62], [69]:

$$a) \frac{c_3}{c_1} \frac{\partial K}{\partial z} + \frac{c_1 c_2 - c_3^2}{c_1} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial(HS_{z\rho})}{\partial \rho} + \frac{\partial(HS_{z\alpha})}{\partial \alpha} \right) = \frac{c_3 e_1 - c_1 e_3}{c_1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{c_3 \beta_{20} - c_3 \beta_{10}}{c_1} \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (1.6)$$

$$b) \frac{\partial K}{\partial \rho} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial(hS_{z\rho})}{\partial z} = 0,$$

$$c) \frac{\partial B}{\partial \rho} + \frac{\partial K}{\partial \alpha} + \frac{\partial(HS_{z\alpha})}{\partial z} = 0, \quad (1.7)$$

$$d) \frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial(H\tau_{z\alpha})}{\partial \rho} - \frac{\partial(H\tau_{z\rho})}{\partial \alpha} \right) - \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial B}{\partial z} = 0,$$

სადაც

$$\begin{aligned}
a) K &= c_1 \left[\frac{\partial(Hu)}{\partial\rho} + \frac{\partial(Hv)}{\partial\alpha} \right] + c_3 \frac{\partial w}{\partial z} + e_1 \frac{\partial\phi}{\partial z} - \beta_{10} T, \\
b) B &= c_5 \frac{1}{H^2} \left[\frac{\partial(Hv)}{\partial\rho} - \frac{\partial(Hu)}{\partial\alpha} \right], \\
c) S_{z\rho} &= c_4 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{H} \frac{\partial(Hw)}{\partial\rho} \right) + e_3 \frac{1}{H} \frac{\partial\phi}{\partial\rho}, \\
d) S_{z\alpha} &= c_4 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{H} \frac{\partial w}{\partial\alpha} \right) + e_3 \frac{1}{H} \frac{\partial\phi}{\partial\alpha}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

გადაადგილების \vec{U} ვექტორის როტორის კომპონენტებს შემდეგი სახე აქვთ [69]:

$$\begin{aligned}
a) B_\rho &= c_4 \frac{1}{H} \left[\frac{\partial w}{\partial\alpha} - \frac{\partial(Hv)}{\partial z} \right], \\
b) B_\alpha &= c_4 \frac{1}{H} \left[\frac{\partial(Hu)}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial\rho} \right], \\
c) B_z &= c_5 \frac{1}{H^2} \left[\frac{\partial(Hv)}{\partial\rho} - \frac{\partial(Hu)}{\partial\alpha} \right].
\end{aligned} \tag{1.9}$$

ასევე

$$\begin{aligned}
a) S_{z\alpha} &= B_\rho + 2c_4 \frac{\partial v}{\partial z} + e_3 \frac{1}{H} \frac{\partial\phi}{\partial\alpha} = -B_\rho + \frac{1}{H} \frac{\partial w}{\partial\alpha} + e_3 \frac{1}{H} \frac{\partial\phi}{\partial\alpha}, \\
b) S_{z\rho} &= B_\alpha + 2c_4 \frac{1}{H} \frac{\partial(Hw)}{\partial\rho} + e_3 \frac{1}{H} \frac{\partial\phi}{\partial\rho} = -B_\alpha + 2c_4 \frac{\partial u}{\partial z} + e_3 \frac{1}{H} \frac{\partial\phi}{\partial\rho}, \\
c) S_{\rho\alpha} &= B_z - 2c_5 \frac{1}{H^2} \frac{\partial h}{\partial\rho} v + 2c_5 \frac{1}{H} \frac{\partial u}{\partial\alpha} = -B_z - 2c_5 \frac{1}{H^2} \frac{\partial H}{\partial\rho} u + 2c_5 \frac{1}{H} \frac{\partial v}{\partial\rho},
\end{aligned} \tag{1.10}$$

მაშინ გვექნება:

$$\begin{aligned}
a) & \frac{c_3 + 2c_4}{c_1} \frac{\partial \tilde{K}}{\partial z} + \frac{c_1 c_2 - (c_3 + 2c_4)^2}{c_1} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{1}{H^2} \frac{\partial(HB_\alpha)}{\partial\rho} + \\
& + \frac{1}{H^2} \frac{\partial(HB_\rho)}{\partial\alpha} = \frac{\beta_{20} c_1 - (c_3 + 2c_4)}{c_1} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{(c_3 + 2c_4)e_1 - c_1 e_2}{c_1} \times \\
& \times \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - e_3 \frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial\alpha^2} \right), \\
b) & \frac{\partial \tilde{K}}{\partial\rho} - \frac{\partial B_z}{\partial\alpha} + \frac{\partial(HB_\alpha)}{\partial z} + e_3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial\rho \partial z} = 0,
\end{aligned} \tag{1.11}$$

$$c) \frac{\partial B_z}{\partial \rho} + \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \alpha} - \frac{\partial (HB_\rho)}{\partial z} + e_3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha \partial z} = 0, \quad (1.12)$$

$$d) \frac{\partial (HB_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial (HB_\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial (H^2 B_z)}{\partial z} = 0,$$

სადაც

$$\tilde{K} = c_1 \frac{1}{H^2} \left[\frac{\partial (Hu)}{\partial \rho} + \frac{\partial (Hv)}{\partial \alpha} \right] + (c_3 + 2c_4) \frac{\partial w}{\partial z} - \beta_{10} T + e_1 \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (1.13)$$

სასაზღვრო პირობებს, რომლებიც განსაზღვრავენ განსახილავი სასაზღვრო ამოცანების კლასს, შემდეგი სახე აქვთ:

$$\text{როცა } \rho = \rho_j: \quad a) \quad \frac{\partial T}{\partial \rho} = 0, \quad u = 0, \quad S_{z\rho} = 0, \quad B = 0, \quad D_\rho = 0, \quad (1.14)$$

$$b) \quad T = 0, \quad K = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \phi = 0.$$

$$\text{როცა } \alpha = \alpha_j: \quad a) \quad \frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0, \quad v = 0, \quad S_{z\alpha} = 0, \quad B = 0, \quad D_\alpha = 0, \quad (1.15)$$

$$b) \quad T = 0, \quad K = 0, \quad u = 0, \quad w = 0, \quad \phi = 0$$

$$\begin{aligned} \text{როცა } z = z_j: \quad a) \quad \frac{\partial T}{\partial \alpha} = F_{j1}(\rho, \alpha), \quad b) \quad T = F_{j2}(\rho, \alpha), \\ c) \quad \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \Theta_j T = F_{j3}(\rho, \alpha), \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$z = z_j: \quad a) \quad \phi = F_{j4}(\rho, \alpha), \quad b) \quad D_z = F_{j5}(\rho, \alpha). \quad (1.17)$$

როცა $z = z_j$:

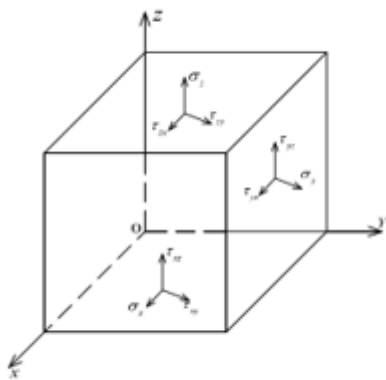
$$\left\{ \begin{aligned} a) \quad N_z = F_{j6}(\rho, \alpha), \quad HS_{z\rho} = F_{j7}(\rho, \alpha), \quad HS_{z\alpha} = F_{j8}(\rho, \alpha), \\ b) \quad w = f_{j1}(\rho, \alpha), \quad Hu = f_{j2}(\rho, \alpha), \quad Hv = f_{j3}(\rho, \alpha), \\ c) \quad N_z = F_{j6}(\rho, \alpha), \quad Hu = f_{j2}(\rho, \alpha), \quad Hv = f_{j3}(\rho, \alpha), \\ d) \quad w = F_{j6}(\rho, \alpha), \quad HS_{z\rho} = F_{j7}(\rho, \alpha), \quad HS_{z\alpha} = F_{j8}(\rho, \alpha). \end{aligned} \right. \quad (1.18)$$

სადაც $j=0,1$; $l=1, \dots, 8$. ამასთან, (1.16) და (1.18) ფორმულებში მონაწილე $F_{jl}(\rho, \alpha)$, $f_{jl}(\rho, \alpha)$, ფუნქციები $\bar{\Omega} = \{(\rho, \alpha) \in R : 0 \leq \rho_o < \rho < \rho_1; \alpha_o < \alpha < \alpha_1\}$ არეში მოცემული ფუნქციებია. ამასთან ისეთი, რომ Ω არის წიბოებზე სრულდება შეთანხმებულობის პირობები; რაც შეეხება ამ ფუნქციების დიფერენციალურ თვისებებს, ამაზე ქვემოთ გვექნება საუბარი.

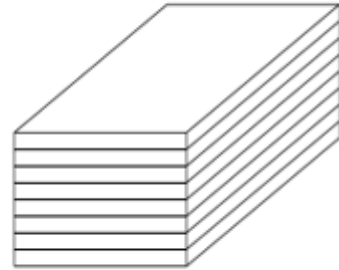
თავი 2. თერმოელექტროდრეკადობის მათემატიკური მოდელი დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში

2.1. სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნა მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის ფილისათვის

2.1.1. დეკარტის მართკუთხა x, y, z კოორდინატთა სისტემაში განვიხილოთ ტრანსვერსალურად იზოტროპული ერთგვაროვანი ფილა, რომელსაც უკავია არე: $\Omega = \{0 < x < x_1; 0 < y < y_1; 0 < z < z_1\}$. იზოტროპიის სიბრტყეა $z = const$ სიბრტყე. ფილა თუ მრავალფენიანია, მაშინ საკონტაქტო ზედაპირებია $z = const$.



ნახ. 1



ნახ.2.

ფილაზე მოქმედებს სტაციონალური ტემპერატურული ველი და ელექტრული ველი, ასევე ზედაპირული გარე შეშფოთებები. მოცულობითი ძალები უგულებელყოფილია. თუ გათვალისწინებთ, რომ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში ლამეს კოეფიციენტები $H_x = 1, H_y = 1, H_z = 1$, მაშინ (1.1)-(1.7) განტოლებებს აქვთ შემდეგი სახე [65],[69]:

$$\begin{cases} a) \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial z} = 0, \\ b) \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial S_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial S_{yx}}{\partial x} = 0, \\ c) \frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{\partial S_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{zy}}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0, \quad (2.2)$$

(2.1) და (2.2) შესაბამისად დრეკადი წონასწორობის და ელექტროსტატიკის

განტოლებებია. სიმარტივისთვის მოცულობითი ძალები ნულის ტოლად მივიღოთ.

თერმოელექტროდრეკადობის ფიზიკურ კანონს აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} N_x = c_1 \varepsilon_{xx} + (c_1 - 2c_5) \varepsilon_{yy} + c_3 \varepsilon_{zz} - e_1 E_z - \beta_{10} T \\ N_y = (c_1 - 2c_5) \varepsilon_{xx} + c_1 \varepsilon_{yy} + c_3 \varepsilon_{zz} - e_1 E_z - \beta_{10} T; \\ N_z = c_3 (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + c_2 \varepsilon_{zz} - e_2 E_z - \beta_{20} T; \\ S_{yz} = c_4 \varepsilon_{yz} - e_3 E_y; \\ S_{xz} = c_4 \varepsilon_{xz} - e_3 E_x; \\ S_{xy} = c_5 \varepsilon_{xy}; \\ D_x = e_3 \varepsilon_{xz} + \varepsilon_1 E_x; \\ D_y = e_3 \varepsilon_{yz} + \varepsilon_1 E_y; \\ D_z = e_1 (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + e_2 \varepsilon_{zz} + \varepsilon_2 E_z. \end{cases} \quad (2.3)$$

ხოლო კოშის განტოლებებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

სადაც u, v, w - გადაადგილების \vec{U} ვექტორის მდგენელებია შესაბამის ღერძებზე.

T ტემპერატურისათვის გვაქვს

$$\Delta_2 T + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (2.5)$$

განტოლება შემდეგი სასაზღვრო პირობებით:

$$\begin{aligned} a) \quad \frac{\partial T}{\partial y} &= F_{j1}(x, y), \quad \text{ან} \quad b) \quad T = F_{j2}(x, y), \quad \text{ან} \\ c) \quad \frac{\partial T}{\partial y} + \Theta_j T &= F_{j3}(x, y). \end{aligned}$$

აქ $\lambda_1 = const, \lambda_2 = const$ სითბო გამტარებლობის კოეფიციენტებია იზოტროპიის

სიბრტყეში და z ღერძის გასწვრივ. $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - ლაპლასის ოპერატორია

დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში.

თუ (2.3), (2.4) ფორმულებს შევიტანთ (2.1) და (2.2) განტოლებებში, გვექნება:

$$c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c_4 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (c_1 - c_5) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (c_3 + c_4) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + (e_1 + e_3) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} +$$

$$-\beta_{10} \frac{\partial T}{\partial x} = 0;$$

$$(c_1 - c_5) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c_5 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + c_4 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (c_3 + c_4) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + (e_1 + e_3) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} +$$

$$-\beta_{10} \frac{\partial T}{\partial y} = 0;$$

$$(c_3 + c_4) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + (c_3 + c_4) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + c_4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + c_2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + e_3 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) +$$

$$+ c_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \beta_{10} \frac{\partial T}{\partial z} = 0;$$

$$(e_1 + e_3) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + (e_1 + e_3) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + e_3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + e_2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \varepsilon_1 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) - \varepsilon_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0.$$

წონასწორობის და ელექტროსტატიკის განტოლებებს შეგვიძლია მივცეთ შემდეგი სახე [69]

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \frac{c_3}{c_1} \frac{\partial K}{\partial z} + \frac{c_1 c_2 - c_3^2}{c_1} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial S_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{zy}}{\partial y} = \frac{c_3 e_1 - c_1 e_3}{c_1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{c_3 \beta_{20} - c_3 \beta_{10}}{c_1} \frac{\partial T}{\partial z}; \\ b) \frac{\partial K}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial S_{zx}}{\partial z} = 0; \\ c) \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} + \frac{\partial S_{zy}}{\partial z} = 0; \\ d) \frac{\partial S_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial S_{zx}}{\partial y} - \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial B}{\partial z} = 0. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

$$e) \varepsilon_1 \Delta_2 \phi + \varepsilon_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = e_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + e_3 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + e_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + e_3 \Delta_2 w + e_2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

სადაც

$$a) K = c_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + c_3 \frac{\partial w}{\partial z} + e_1 \frac{\partial \phi}{\partial z} - \beta_{10} T,$$

$$b) B = c_5 \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2.7)$$

$$c) S_{zx} = c_4 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + e_3 \frac{\partial \phi}{\partial x},$$

$$d) N_{zy} = c_4 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + e_3 \frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

გადაადგილების \vec{U} ვექტორის როტორის კომპონენტებს შემდეგი სახე აქვთ:

$$\begin{aligned}
a) B_x &= c_4 \left[\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right]; \\
b) B_y &= c_4 \left[\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right]; \\
c) B_z &= c_5 \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right].
\end{aligned} \tag{2.8}$$

და გავითვალისწინებთ, რომ

$$\begin{aligned}
a) S_{zy} &= B_x + 2c_4 \frac{\partial v}{\partial z} + e_3 \frac{\partial \phi}{\partial y} = -B_x + 2c_4 \frac{\partial w}{\partial y} + e_3 \frac{\partial \phi}{\partial y}, \\
b) S_{zx} &= B_y + 2c_4 \frac{\partial w}{\partial x} + e_3 \frac{\partial \phi}{\partial x} = -B_y + 2c_4 \frac{\partial u}{\partial z} + e_3 \frac{\partial \phi}{\partial x}, \\
c) S_{xy} &= B_z + 2c_5 \frac{\partial u}{\partial y} = -B_z + 2c_5 \frac{\partial v}{\partial x},
\end{aligned} \tag{2.9}$$

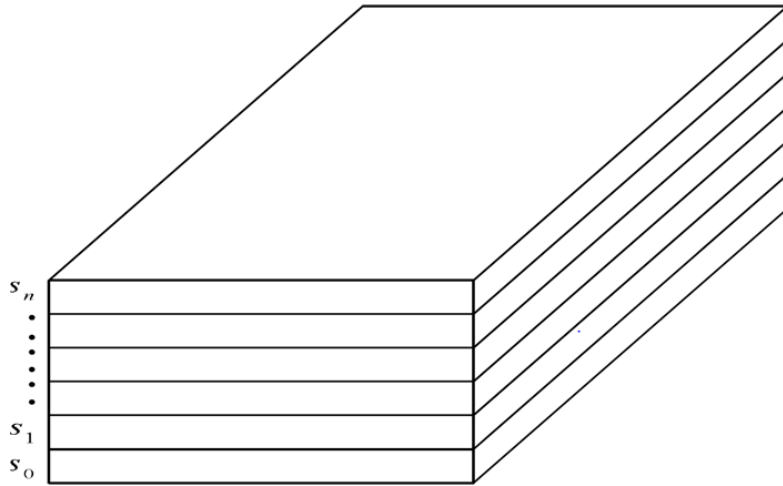
მაშინ (2.1) და (2.2) სისტემისთვის გვექნება:

$$\begin{aligned}
a) \frac{c_3 + 2c_4}{c_1} \frac{\partial \tilde{K}}{\partial z} + \frac{c_1 c_2 - (c_3 + 2c_4)^2}{c_1} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial B_y}{\partial x} + \\
+ \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\beta_{20} c_1 - (c_3 + 2c_4)}{c_1} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{(c_3 + 2c_4) e_1 - c_1 e_2}{c_1} \times \\
\times \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - e_3 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right), \\
b) \frac{\partial \tilde{K}}{\partial x} - \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z} + e_3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} = 0, \\
c) \frac{\partial B_z}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{K}}{\partial y} - \frac{\partial B_x}{\partial z} + e_3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} = 0, \\
d) \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

სადაც

$$\tilde{K} = c_1 \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] + (c_3 + 2c_4) \frac{\partial w}{\partial z} - \beta_{10} T + e_1 \frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{2.11}$$

2.1.2. ამ პუნქტში ერთიანი და მოხერხებული თხრობისათვის წინასწარ მოგვყავს სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო პირობები, განვიხილავთ ზოგიერთ სასაზღვრო და საკონტაქტო პირობების ტოლფასობის საკითხებს, ასევე ჩამოვყავალიბებთ სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანებს ერთ და მრავალფენიანი (გეგმაში მართკუთხა) ფილებისათვის.



ნახ. 3

განვიხილოთ ტრანსტროპული მრავალფენიანი ფილა $\Omega = \bigcup_{k=1}^l \Omega_k$, სადაც

$\Omega_k = x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1, z_0 < z < z_1$, როგორც წესი $\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^l \bar{\Omega}_k$, სადაც

$\bar{\Omega}_k = x_0 \leq x \leq x_1, y_0 \leq y \leq y_1, z_0 \leq z \leq z_1$. აღვნიშნოთ z_k საკოორდინატო სიბრტყის შესაბამისი სიბრტყე $s = s_k$ -თი, ამასთან $k = 0$ ან $k = l$ (ნახ.3).

T ტემპერატურას, φ ელექტრულ პოტენციალს, გადაადგილების \vec{U} ვექტორის, ელექტრული \vec{D} ინდუქციის ვექტორის, ელექტრული \vec{E} ველის ვექტორის და ძაბვის ტენზორის კომპონენტებს k -ურ ფენაში აღვნიშნავთ ზედა k ინდექსით.

სასაზღვრო და საკონტაქტო პირობებს, რომლებსაც შემდეგ განვიხილავთ შესაბამისი სასაზღვრო ან სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების დასმისას აქვთ შემდეგი სახე.

s_0 ან s_l ზედაპირზე (ანუ საკოორდინატო z_0 ან z_l სიბრტყეზე)

$$\begin{aligned}
 a) & N_z = F_{j_1}(x, y), \quad S_{zx} = F_{j_2}(x, y), \quad S_{zy} = F_{j_3}(x, y); \\
 b) & w = f_{j_1}(x, y), \quad u = f_{j_2}(x, y), \quad v = f_{j_3}(x, y); \\
 c) & N_z = F_{j_1}(x, y), \quad u = f_{j_2}(x, y), \quad v = f_{j_3}(x, y); \\
 d) & w = f_{j_1}(x, y), \quad S_{zx} = F_{j_2}(x, y), \quad S_{zy} = F_{j_3}(x, y),
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

ამასთან, როცა $z = z_0$ ან $z = z_l$ ტემპერატურული ველისათვის მოცემულია შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$a) \quad \frac{\partial T}{\partial y} = F_{j_4}(x, y), \quad \text{ან} \quad b) \quad T = F_{j_5}(x, y), \quad \text{ან}$$

$$c) \frac{\partial T}{\partial y} + \Theta_j T = F_{j6}(x, y), \quad (2.13)$$

ხოლო ელექტრული ველისათვის

$$a) \varphi = F_{j7}(x, y), \quad \text{ან} \quad b) D_z = F_{j8}(x, y). \quad (2.14)$$

(2.8), (2.9), (2.10) ტოლობებში $k = 0$ ან 1 .

ყოველ ფენაში როცა $x = x_0$ ან $x = x_1$

$$a) \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad u = 0, \quad S_{zx} = 0, \quad B = 0, \quad D_x = 0, \quad \text{ან} \quad (2.15)$$

$$b) T = 0, \quad K = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \varphi = 0.$$

როცა $y = y_0$ ან $y = y_1$

$$a) \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad v = 0, \quad S_{zy} = 0, \quad B = 0, \quad D_y = 0, \quad (2.16)$$

$$b) T = 0, \quad K = 0, \quad u = 0, \quad w = 0, \quad \varphi = 0$$

k -ურ საკონტაქტო S_k ზედაპირზე სრულდება შემდეგი პირობები:

$$T^k - T^{k+1} = 0, \quad \frac{\partial T^k}{\partial z} - \frac{\partial T^{k+1}}{\partial z},$$

$$D_z^k - D_z^{k+1} = 0, \quad \frac{\partial D_z^k}{\partial z} - \frac{\partial D_z^{k+1}}{\partial z},$$

$$N_z^k - N_z^{k+1} = 0, \quad S_{zx}^k - S_{zx}^{k+1} = 0, \quad S_{zx}^k - S_{zx}^{k+1} = 0, \quad (2.17)$$

$$u^k - u^{k+1} = 0, \quad v^k - v^{k+1} = 0, \quad w^k - w^{k+1} = 0,$$

ან

$$w^k - w^{k+1} = 0, \quad N_z^k - N_z^{k+1} = 0,$$

$$S_{zx}^k = 0, \quad S_{zx}^{k+1} = 0,$$

$$S_{zy}^k = 0, \quad S_{zy}^{k+1} = 0; \quad (2.18)$$

ან

$$N_z^k = 0, \quad N_z^{k+1} = 0, \quad S_{zx}^k - S_{zx}^{k+1} = 0, \quad S_{zy}^k - S_{zy}^{k+1} = 0,$$

$$u^k - u^{k+1} = 0, \quad v^k - v^{k+1} = 0; \quad (2.19)$$

და ა.შ.

ამასთან, (2.8) - (2.10) ფორმულებში მონაწილე $F_{ji}(x, y), f_{ji}(x, y)$ ფუნქციები $\bar{\Omega}_z = \{x_0 < x < x_1; y_0 < y < y_1\}$ არეში მოცემული ისეთი ფუნქციებია, რომ ფილის წიბოებზე სრულდება შეთანხმებულობის პირობები; რაც შეეხება

$$F_{ip} = F_{ip}(x, y) \left(p = \overline{1, 6} \right), f_{iq} = f_{iq}(x, y) \left(q = \overline{1, 5} \right),$$

$$F_r = F_r(x, y) \left(r = \overline{1, 7} \right), f_s = f_s(x, y) \left(s = \overline{1, 5} \right)$$

ფუნქციებს, მათგან მოვითხოვთ, რომ $F_{ip} \in C^{1,q}(S_k), f_{iq} \in C^{2,q}(S_k), C^{i,q}(S_k)$ - ფილის ზედაპირზე i -ჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციებია, ამასთან i -ური წარმოებული ეკუთვნის $C^{0,q}(S_k), \frac{1}{2} < q < 1$ ჰელდერის კლასს. ეს პირობები უზრუნველყოფენ, რომ ფუნქციები შეგვიძლია წარმოვადგინოთ აბსოლუტური და თანაბრად კრებადი ფურიეს მწკრივების სახით. გარდა ამისა, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ ფილის წიბოებზე აკმაყოფილებენ შეთანხმებულობის პირობებს.

სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების ამოხსნისათვის ხელსაყრელია (2.8)-(2.15) პირობები შესაბამისად შევცვალოთ შემდეგი პირობებით (ქვემოთ კონკრეტული სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნისას დავრწმუნდებით ასეთი შეცვლის უპირატესობაში)

$$\begin{aligned} a) \quad & \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad u = 0, \quad S_{zx} = 0, \quad B = 0, \quad D_x = 0; \\ b) \quad & T = 0, \quad K = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \phi = 0. \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned} a) \quad & \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad v = 0, \quad S_{zy} = 0, \quad B = 0, \quad D_y = 0; \\ b) \quad & T = 0, \quad K = 0, \quad u = 0, \quad w = 0, \quad \phi = 0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$a) \quad \frac{\partial T}{\partial y} = F_{j1}(x, y), \quad b) \quad T = F_{j2}(x, y), \tag{2.22}$$

$$c) \quad \frac{\partial T}{\partial y} + \Theta_j T = F_{j3}(x, y),$$

$$a) \quad \varphi = F_{j4}(x, y), \quad b) \quad D_z = F_{j5}(x, y). \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned} a) \quad & N_z^k = F_{j6}(x, y), \Gamma_1(S_{xz}^k, S_{zy}^k) = \tilde{F}_{j7}(x, y), \Gamma_2(S_{xz}^k, S_{zy}^k) = \tilde{F}_{j8}(x, y); \\ b) \quad & w^k = f_{j3}(x, y), \Gamma_1(u^k, v^k) = \tilde{f}_{j1}(x, y), \Gamma_2(u^k, v^k) = \tilde{f}_{j2}(x, y); \\ c) \quad & N_z^k = F_{j6}(x, y), \Gamma_1(u^k, v^k) = \tilde{f}_{j1}(x, y), \Gamma_2(u^k, v^k) = \tilde{f}_{j2}(x, y); \\ d) \quad & w^k = f_{j3}(x, y), \Gamma_1(S_{xz}^k, S_{zy}^k) = \tilde{F}_{j7}(x, y), \Gamma_2(S_{xz}^k, S_{zy}^k) = \tilde{F}_{j8}(x, y). \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}
a) \quad & N_z^k - N_z^{k+1} = F_1(x, y), \quad w^k - w^{k+1} = 0, \\
& \Gamma_1(S_{xz}^k - S_{xz}^{k+1}, S_{zy}^k - S_{zy}^{k+1}) = 0, \quad \Gamma_2(S_{xz}^k - S_{xz}^{k+1}, S_{zy}^k - S_{zy}^{k+1}) = 0, \\
& \Gamma_1(u^k - u^{k+1}, v^k - v^{k+1}) = 0, \quad \Gamma_2(u^k - u^{k+1}, v^k - v^{k+1}) = 0, \\
b) \quad & N_z^k - N_z^{k+1} = 0, \quad w^k - w^{k+1} = 0, \\
& \Gamma_1(S_{xz}^k, S_{zy}^k) = 0, \quad \Gamma_1(S_{xz}^{k+1}, S_{zy}^{k+1}) = 0, \\
& \Gamma_2(S_{xz}^k, S_{zy}^k) = 0, \quad \Gamma_2(S_{xz}^{k+1}, S_{zy}^{k+1}) = 0,
\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}
c) \quad & N_z^k = 0, \quad N_z^{k+1} = 0, \\
& \Gamma_1(u^k - u^{k+1}, v^k - v^{k+1}) = 0, \quad \Gamma_2(u^k - u^{k+1}, v^k - v^{k+1}) = 0, \\
& \Gamma_1(S_{xz}^k - S_{xz}^{k+1}, S_{zy}^k - S_{zy}^{k+1}) = 0, \quad \Gamma_2(S_{xz}^k - S_{xz}^{k+1}, S_{zy}^k - S_{zy}^{k+1}) = 0,
\end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\text{სადაც } \Gamma_1(\eta_1, \eta_2) = \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + \frac{\partial \eta_2}{\partial y}, \quad \Gamma_2(\eta_1, \eta_2) = \frac{\partial \eta_2}{\partial x} - \frac{\partial \eta_1}{\partial y}, \text{ ამასთან } \eta_1 = S_{xz} \text{ ან } \eta_2 = S_{zy}$$

ან $\eta_1 = u$ ან $\eta_2 = v$;

$$F_{j1}(x, y), \tilde{F}_{j2}(x, y) \in C^{1,q}(S_k), \quad f_{j1}(x, y), \tilde{f}_{j2}(x, y) \in C^{2,q}(S_k),$$

მართლაც, თუ გავითვალისწინებთ წიბოებზე შეთანხმებულობის პირობებს, მაშინ (2.8) და (2.20) პირობების ეკვივალენტობა დაიყვანება, რომ

$\Omega = \{x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1\}$ არეში

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial x} + \frac{\partial \eta_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial x} - \frac{\partial \eta_1}{\partial y} = 0 \tag{2.27}$$

სისტემას სასაზღვრო პირობებით:

$$\text{როცა } x = x_i : a) \eta_2 = 0, \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial x} = 0 \text{ ან } b) \eta_1 = 0, \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial x} = 0, \tag{2.28}$$

$$\text{როცა } y = y_i : a) \eta_1 = 0, \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial x} = 0 \text{ ან } b) \eta_2 = 0, \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial y} = 0, \tag{2.29}$$

აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი.

(2.24), (2.25 a), (2.26 b) და (2.24), (2.25 b), (2.26 a) სასაზღვრო ამოცანას, სედოვ-კელდიშის თანხმად, აქვს ტრივიალური ამონახსნი $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$.

(2.24), (2.25 b), (2.26 b) სასაზღვრო ამოცანას აქვს ამონახსნი $\eta_1 = \eta_{10} = const$, $\eta_2 = 0$, ხოლო (2.24), (2.25 a), (2.26 a) სასაზღვრო ამოცანას აქვს ამონახსნი $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = \eta_{20} = const$.

ამგვარად, (2.24),(2.25 b), (2.26 b) და(2.24),(2.25 a), (2.26 a) სასაზღვრო ამოცანას აქვს არანულოვანი ამონახსნი, ეს კი იმას ნიშნავს რომ (2.8)სასაზღვრო პირობების (2.20) სასაზღვრო პირობებით შეცვლისას მუდმივი იკარგება. ეს პრობლემა შემდგნაირად შეიძლება გადაწყდეს: (2.4),(2.6),(2.7),(2.9),(2.10), (2.11 a),

(2.12 b),(2.20) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნს ემატება ამონახსნი

$$u = 0, w = 0, v = b_1 + b_2 l_z, \quad (2.30)$$

ხოლო (2.4), (2.6), (2.7), (2.9), (2.10), (2.11 b), (2.12 a), (2.20) სასაზღვრო ამოცანის ემატება ამონახსნი

$$v = 0, w = 0, u = b_3 + b_4 l_z \quad (2.31)$$

(2.27) და (2.28)ტოლობებში $l_z = c_4^{-1} z$, b_1, b_2, b_3, b_4 - მუდმივებია.

შენიშვნა.

ახლა მოვიყვანოთ ამოცანის მათემატიკური ფორმულირება დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში.

სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების რეგულარული ამოხსნა ჰქვია ისეთ ამონახსნს, როდესაც $u^k, v^k, w^k \in C^3(\Omega_k) \cap C^{2,q}(\bar{\Omega}_k)$ ფუნქციები

აკმაყოფილებენ როგორც განტოლებებს, ასევე სასაზღვრო პირობებს და საკონტაქტო პირობებს.

შემდეგში დავკავდებით (2.6),(2.7) განტოლებებით. ფილის თერმოელექტროდრეკადობის განტოლებების განსახილავი სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების კლასისათვის ავაგოთ ზოგადი ამონახსნები. 2.6 b, c, d -დან გვექნება

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = 0 \quad (2.32)$$

ანუ

$$\Delta_2 B + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = 0. \quad (2.33)$$

აუცილებელია შემდეგი მნიშვნელოვანი შენიშვნის გაკეთება (2.16) სასაზღვრო პირობებთან დაკავშირებით. ამ პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ ფილის $x = x_j$ ან $y = y_j$ გვერდით წახნაგებზე მოცემულია ან თავად B ფუნქცია ან მისი ნორმალური წარმოებული ნოლის ტოლია. მართლაც, ეს გამომდინარეობს

2.6 *b, c, d* განტოლებებიდან. როცა $z = z_j$ ანუ ფილის ტორსულ წახნაგებზე (2.8) - დან გამომდინარეობს, რომ

$$\Gamma_2(u^k, v^k) = \frac{1}{c_5} B, \quad \Gamma_2(S_{xz}^k, S_{zy}^k) = \frac{1}{c_5} \frac{\partial B}{\partial z}.$$

ამრიგად B ფუნქციის განსაზღვრისათვის მივიღეთ შემდეგი სასაზღვრო ამოცანა. უნდა ვიპოვოთ B ფუნქცია (2.30) განტოლებიდან, თუ ფილის წახნაგებზე მოცემულია თავად B ფუნქცია, ან მისი ნორმალური წარმოებული ან ფილის ერთ ნაწილზე მოცემულია B , ხოლო დარჩენილ ნაწილზე - მისი ნორმალური წარმოებული. როგორც ვხედავთ B ფუნქციისათვის მივიღეთ მათემატიკური ფიზიკის კლასიკური ამოცანა.

თერმოელექტროდრეკადობის თეორიის სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის ამ მეთოდის ერთი უპირატესობა ისიც არის, რომ ზოგადი დრეკადი ველი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც ორი ველის სუპერპოზიცია, რომელთაგან ერთი სოლონოიდალური ველია, ე.ი. $\text{div } \vec{U} = 0, \vec{w} = 0, T = 0, \varphi = 0$, ხოლო მეორე თერმოელექტროდრეკადი ველი წარმოადგენს გადადგილების როტორის ბრტყელი ვექტორის, როცა $\text{rot}_z U = 0$

B ფუნქცია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$B = \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} \tag{2.34}$$

სადაც ψ_1 ნებისმიერი ფუნქციაა, რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\Delta_2 \psi_1 + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = 0. \tag{2.35}$$

(2.31) და (2.32)-ის გათვალისწინებით

$$B = -\Delta_2 \psi_1. \tag{2.36}$$

ახლა თუ (2.31) და (2.33) ფორმულებს გავითვალისწინებთ (2.6) სისტემაში, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(S_{xz} - \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y \partial z} \right) &= 0; \\ \frac{\partial K}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(S_{yz} + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial z} \right) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(S_{yz} + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(S_{xz} - \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y \partial z} \right) &= 0. \end{aligned} \tag{2.37}$$

ცნობილია, რომ (2.37) ფორმულები აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ არსებობდეს ისეთი $\psi_2(x, y, z)$, ფუნქცია რომლისთვისაც სამართლიანია შემდეგი

$$\begin{cases} K = -\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2}, \\ S_{xz} = \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial z} + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial \psi_1}{\partial y \partial z}, \\ S_{yz} = \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y \partial z} - \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial z}. \end{cases} \quad (2.38)$$

თუ ახლა (2.34)-სა და (2.38) ფორმულებს შევიტანთ (2.7)-ში, მივიღებთ

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(w + \frac{e_3}{c_4} - \frac{1}{c_4} \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(u - \frac{1}{c_5} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(w + \frac{e_3}{c_4} - \frac{1}{c_4} \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(v + \frac{1}{c_5} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(v + \frac{1}{c_5} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u - \frac{1}{c_5} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) = 0. \end{cases} \quad (2.39)$$

(2.39) წარმოადგენს აუცილებელ და საკმარის პირობას, რათა არსებობდეს $\bar{\psi}_3(x, y, z)$ ფუნქცია, რომლისთვისაც

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{\psi}_3}{\partial x} = u - \frac{1}{c_5} \frac{\partial \psi_1}{\partial y}, \\ \frac{\partial \bar{\psi}_3}{\partial y} = v + \frac{1}{c_5} \frac{\partial \psi_1}{\partial x}, \\ \frac{\partial \bar{\psi}_3}{\partial z} = -w + \frac{1}{c_4} \frac{\partial \psi_2}{\partial y}. \end{cases} \quad (2.40)$$

აქედან კი მივიღებთ

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \bar{\psi}_3}{\partial x} + \frac{1}{c_5} \frac{\partial \psi_1}{\partial y}, \\ v = \frac{\partial \bar{\psi}_3}{\partial y} - \frac{1}{c_5} \frac{\partial \psi_1}{\partial x}, \\ w = -\frac{\partial \bar{\psi}_3}{\partial z} + \frac{1}{c_4} \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \frac{e_3}{c_4} \varphi. \end{cases} \quad (2.41)$$

ანუ

$$\begin{cases} u = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Psi_3 + \frac{1}{2c_4} \Psi_2 \right) + \frac{1}{c_5} \frac{\partial \psi_1}{\partial y}, \\ v = \frac{\partial}{\partial y} \left(\Psi_3 + \frac{1}{2c_4} \Psi_2 \right) - \frac{1}{c_5} \frac{\partial \psi_1}{\partial x}, \\ w = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\Psi_3 + \frac{1}{2c_4} \Psi_2 \right) + \frac{1}{c_4} \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} - \frac{e_3}{c_4} \varphi. \end{cases} \quad (2.41')$$

თუ (2.35)-ს და (2.38) ფორმულებსშევიტანთ შესაბამისად (2.6 a) და (2.7 a) - ში მივიღებთ

$$\begin{cases} a) \frac{\partial}{\partial z} \left(\Delta_2 \psi_2 - \frac{c_3}{c_1} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} + \frac{c_1 c_2 - c_3^2}{c_1} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} - \frac{c_1 c_2 - c_3^2}{2c_1 c_4} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} + \frac{c_1 e_3 - c_4 c_1 e_3 - c_1 e_2}{c_1 c_4} \varphi - \frac{c_1 \beta_{20} - c_3 \beta_{10}}{c_1} T \right) = 0, \\ b) \Delta_2 \psi_3 + \frac{1}{2c_4} \Delta_2 \psi_2 + \frac{1}{c_1} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} - \frac{c_3}{c_1} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} + \frac{c_3}{2c_1 c_4} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} - \frac{c_3 e_3}{c_1 c_4} \varphi - \frac{\beta_{10}}{c_1} T = 0. \end{cases} \quad (2.42)$$

ე.ი. (2.38) ფორმულებში მონაწილე $\psi_2(x, y, z)$ და $\psi_3(x, y, z)$ ნებისმიერი ფუნქციები აკმაყოფილებენ (2.39) სისტემას. ადვილი საჩვენებელია, რომ ზოგადობის შეუზღუდავად (2.39 a) განტოლების ინტეგრების შედეგად წარმოშობილი ფუნქცია $f(x, y)$ ნულის ტოლად ჩავთვალოთ და მარტივი გარდაქმნების შედეგად, საბოლოოდ თერმოელექტროდრეკადი ველის განმსაზღვრელ სისტემას აქვს შემდეგი სახე

$$\begin{aligned}
a) \Delta_2 \psi_1 + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} &= 0 \\
b) \Delta_2 \psi_2 + \frac{c_1 c_2 - c_3^2 - 2c_3 c_4}{2c_1 c_4} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} + \frac{c_1 c_2 - c_3^2}{c_1} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} - \\
&\quad - \frac{c_1 c_2 - c_3^2}{c_1 c_4} \frac{e_3 + e_1 c_3 - c_1 e_2 c_4}{\partial z} - \frac{c_1 \beta_{20} - c_3 \beta_{10}}{c_1} T = 0, \\
c) 2c_4 \Delta_2 \psi_3 + \Delta_2 \psi_2 + \frac{c_3 + 2c_4}{c_1} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} - \frac{2c_3 c_4}{c_1} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} - \\
&\quad - \frac{2c_3 e_3 - c_4 e_1}{c_1} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{2c_4 \beta_{10}}{c_1} T = 0, \\
e) \Delta_2 \varphi + \frac{e_2 e_3 + e_2 c_4}{e_1 c_4 + e_3^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{e_1 c_4}{e_1 c_4 + e_3^2} \Delta_2 \psi_3 - \frac{e_2 c_4}{e_1 c_4 + e_3^2} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{e_1 + 2e_3}{e_1 c_4 + e_3^2} \Delta_2 \psi_2 + \frac{e_2}{2(e_1 c_4 + e_3^2)} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} \right].
\end{aligned} \tag{2.43}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $T = \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2}$, $\varphi = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z}$ და ბოლო განტოლების

z -ინტეგრების (ფუნქცია, რომელიც გაჩნდება ინტეგრების შედეგად, ზოგადობის შეუზღუდავად ნულის ტოლია [67]) შემდეგ, ცხადი მარტივი გარდაქმნების შედეგად (იგულისხმება და განტოლებების ელემენტარული გარდაქმნები, კერძოდ მათი წრფივი კომბინაციები) მივიღებთ შემდეგ სისტემას:

$$\begin{aligned}
a) \Delta_2 \psi_1 + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} &= 0, \\
b) \Delta_2 \psi_3 + a_1 \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} - a_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} - a_3 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z^2} + a_{10} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z^2} &= 0, \\
c) \Delta_2 \psi_2 + a_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} - a_4 \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} - a_5 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z^2} - a_9 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z^2} &= 0, \\
e) \Delta_2 \tilde{\varphi} + a_6 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z^2} - a_7 \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} - a_8 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} - a_{10} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2} &= 0,
\end{aligned} \tag{2.44}$$

სადაც

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{c_1 c_2 - c_3^2 - 2c_3 c_4}{2c_1 c_2}, \quad a_2 = \frac{c_1 c_2 - c_3^2 + 2c_4^2}{2c_1 c_2} \\
a_3 &= \frac{c_4 - 2c_3 e_3 - 2c_4 e_1 - c_3 e_1 + c_1 e_2 - c_1 c_2 - c_3^2}{2c_1 c_4^2}, \quad a_4 = \frac{c_1 c_2 - c_3^2}{c_1}, \\
a_5 &= \frac{c_1 c_2 - c_3^2 e_3 + c_3 e_1 - c_1 e_2 c_4}{2c_1 c_4^2},
\end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned}
a_6 &= \frac{1}{2c_1 c_4^2 (c_4 + e_3^2)} \left[2c_1 c_4^2 (e_2 e_3 + c_4 e_1) - c_4^2 (2e_1 e_2 c_3 - 2e_1^2 c_4 - e_1^2 c_3 + \right. \\
&\quad \left. + e_1 e_2 c_1 + 2e_1 c_3 - 2e_2 c_1) + (c_1 c_2 - c_3^2) (2e_1 + 4e_3 - e_1 e_3 c_4) \right]; \\
a_7 &= \frac{(c_1 c_2 - c_3^2) (c_4 e_1 + 4c_4 e_3) + 2c_2^2 (c_3 e_1 - c_1 e_2)}{2c_1 c_4 (c_4 + e_3^2)}; \\
a_9 &= \frac{c_1 \beta_{20} - c_3 \beta_{20}}{c_1}; \\
a_{10} &= \frac{c_1 \beta_{20} - (c_3 + 2c_4) \beta_{10}}{2c_1 c_4}; \\
a_{11} &= \frac{(c_1 c_4 e_1 + 4c_1 c_4 e_3) \beta_{20} + (2c_4^2 e_1 - 2e_1^2 c_4 - c_3 c_4 e_1 - 4c_3 c_4 e_3) \beta_{10}}{2c_1 c_4 (c_4 + e_3^2)}.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც

$$a_3 a_8^2 + a_2 a_8 - a_6 - a_1 - a_2^2 a_7 = 0 \tag{2.47}$$

და მივიღოთ, რომ

$$\Psi_2 = \psi_2 + g \Psi_3, \quad \Psi_3 = \Psi_3, \quad \tilde{\varphi} = \Phi + \frac{a_8}{a_2} \Psi_3, \tag{2.48}$$

$$\text{სადაც } g = \frac{\sqrt{a_3^2 a_8^2 + 4 a_2 a_4 - a_5 a_8 a_2^2 + a_3 a_8}}{4 a_2^2}.$$

თუ გავითვალისწინებთ (2.43) და (2.44) ფორმულებს, მაშინ (2.41) სისტემა, მიიღებს ასეთ სახეს

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \Delta_2 \psi_1 + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = 0, \\ b) \Delta_2 \Psi_3 + \gamma_6 \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial z^2} = a_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} + a_3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + a_{10} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2}, \\ c) \Delta_2 \psi_2 + \gamma_3 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} = \gamma_4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \gamma_5 \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2}, \\ e) \Delta_2 \Phi + \gamma_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \gamma_2 \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2}, \end{array} \right. \quad (2.49)$$

სადაც

$$\gamma_1 = \frac{a_2 a_6 + a_3 a_8}{a_2}, \gamma_2 = \frac{a_2 a_{11} - a_{10} a_8}{a_2}, \gamma_3 = a_1 - a_2 g, \gamma_4 = a_5 - a_3 g, \gamma_5 = a_9 - a_{10} g,$$

$$\gamma_6 = \frac{a_2 a_1 - a_3 a_8 - a_2^2 g}{a_2},$$

ხოლო \tilde{T} -თვის გვაქვს

$$\Delta_2 \tilde{T} + \lambda \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2} = 0, \quad \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

თუ $\Phi_0, \psi_2^0, \Psi_3^0$ აღვნიშნათ ფუნქციებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ

$$\Delta_2 \Phi_0 + \gamma_1 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} = 0, \quad \Delta_2 \psi_2^0 + \gamma_3 \frac{\partial^2 \psi_2^0}{\partial z^2} = 0, \quad \Delta_2 \Psi_3^0 + \gamma_6 \frac{\partial^2 \Psi_3^0}{\partial z^2} = 0,$$

განტოლებებს, მაშინ $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$ მუდმივების სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის შესაძლებელია აიგოს (2.45) განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსნი.

1) თუ $\gamma_1 \neq \lambda, \gamma_1 \neq \gamma_3 \neq \lambda, \gamma_1 \neq \gamma_3 \neq \gamma_6 \neq \lambda$, მაშინ გვექნება

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1 - \lambda} \tilde{T}, \quad \Psi_2 = \Psi_2^0 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1 - \lambda} \Phi_0 + \frac{\gamma_2 \gamma_4 + \gamma_5 \gamma_1 - \lambda}{\gamma_1 - \lambda \gamma_3 - \lambda} \tilde{T},$$

$$\begin{aligned} \Psi_3 = & \Psi_3^0 + \frac{a_2}{\gamma_1 - \gamma_3} \Psi_2^0 + \frac{a_2 \gamma_4 - a_3 \gamma_1 - \gamma_3}{\gamma_1 - \gamma_3 \gamma_1 - \gamma_6} \Phi_0 - \\ & - \frac{a_3 \gamma_2 \gamma_3 - \lambda + a_2 \gamma_5 \gamma_1 - \lambda + a_{10} \gamma_1 - \lambda \gamma_3 - \lambda + a_2 \gamma_2 \gamma_4}{\gamma_1 - \lambda \gamma_3 - \lambda \gamma_6 - \lambda} \tilde{T} \end{aligned}$$

2) თუ $\gamma_1 \neq \gamma_3 \neq \lambda, \gamma_1 \neq \gamma_3 \neq \gamma_6, \gamma_6 = \lambda$, მაშინ გვექნება

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1 - \lambda} \tilde{T}, \quad \Psi = \Psi_2^0 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1 - \lambda} \Phi_0 + \frac{\gamma_2 \gamma_4 + \gamma_5 \gamma_1 - \lambda}{\gamma_1 - \lambda \gamma_3 - \lambda} \tilde{T},$$

$$\Psi_3 = \Psi_3^0 + \frac{a_2}{\gamma_1 - \gamma_3} \Psi_2^0 + \frac{a_2 \gamma_4 - a_3 \gamma_1 - \gamma_3}{\gamma_1 - \gamma_3 \gamma_1 - \gamma_6} \Phi_0 -$$

$$- \frac{a_3 \gamma_2 \gamma_3 - \lambda + a_2 \gamma_5 \gamma_1 - \lambda + a_{10} \gamma_1 - \lambda \gamma_3 - \lambda + a_2 \gamma_2 \gamma_4}{\gamma_1 - \lambda \gamma_3 - \lambda \gamma_6 - \lambda} z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z}.$$

3) თუ $\gamma_1 \neq \gamma_3 \neq \lambda, \gamma_6 = \gamma_1 \neq \gamma_3 \neq \lambda$, მაშინ გვექნება

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1 - \lambda} \tilde{T}, \quad \Psi = \Psi_2^0 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1 - \lambda} \Phi_0 + \frac{\gamma_2 \gamma_4 + \gamma_5 \gamma_1 - \lambda}{\gamma_1 - \lambda \gamma_3 - \lambda} \tilde{T},$$

$$\Psi_3 = \Psi_3^0 + \frac{a_2}{\gamma_1 - \gamma_3} \Psi_2^0 + \frac{a_2 \gamma_4 - a_3 \gamma_1 - \gamma_3}{2\gamma_1 \gamma_1 - \gamma_6} z \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} -$$

$$- \frac{a_3 \gamma_2 \gamma_3 - \lambda + a_2 \gamma_5 \gamma_1 - \lambda + a_{10} \gamma_1 - \lambda \gamma_3 - \lambda + a_2 \gamma_2 \gamma_4}{\gamma_1 - \lambda \gamma_3 - \lambda \gamma_6 - \lambda} \tilde{T}.$$

4) თუ $\gamma_1 \neq \gamma_3 \neq \lambda, \gamma_6 = \gamma_3, \gamma_1 \neq \gamma_6 \neq \lambda$, მაშინ გვექნება

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1 - \lambda} \tilde{T}, \quad \Psi = \Psi_2^0 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1 - \lambda} \Phi_0 + \frac{\gamma_2 \gamma_4 + \gamma_5 \gamma_1 - \lambda}{\gamma_1 - \lambda \gamma_3 - \lambda} \tilde{T},$$

$$\Psi_3 = \Psi_3^0 + \frac{a_2}{2\gamma_3} \Psi_2^0 + \frac{a_2 \gamma_4 - a_3 \gamma_1 - \gamma_3}{\gamma_1 - \gamma_3 \gamma_1 - \gamma_6} \Phi_0 -$$

$$- \frac{a_3 \gamma_2 \gamma_3 - \lambda + a_2 \gamma_5 \gamma_1 - \lambda + a_{10} \gamma_1 - \lambda \gamma_3 - \lambda + a_2 \gamma_2 \gamma_4}{\gamma_1 - \lambda \gamma_3 - \lambda \gamma_6 - \lambda} \tilde{T}.$$

5) თუ $\gamma_1 \neq \lambda, \gamma_1 = \gamma_3, \gamma_1 \neq \gamma_6, \lambda \neq \gamma_6, \gamma_3 \neq \lambda, \gamma_3 \neq \gamma_6$, მაშინ გვექნება

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1 - \lambda} \tilde{T}, \quad \Psi = \Psi_2^0 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1 - \lambda} \Phi_0 + \frac{\gamma_2 \gamma_4 + \gamma_5 \gamma_1 - \lambda}{\gamma_1 - \lambda \gamma_3 - \lambda} \tilde{T},$$

$$\Psi_3 = \Psi_3^0 + \frac{a_2}{\gamma_1 - \gamma_3} \Psi_2^0 + \frac{a_3 \gamma_1 + a_2 \gamma_4 \gamma_1 - \gamma_6 - a_2 \gamma_2 \gamma_4}{2\gamma_1 \gamma_1 - \gamma_6} \Phi_0 +$$

$$+ \frac{a_2 \gamma_4}{2\gamma_1 \gamma_1 - \gamma_6} z \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} - \left\{ \frac{a_3 \gamma_2 \gamma_3 - \lambda + a_2 \gamma_5 \gamma_1 - \lambda}{\gamma_1 - \lambda \gamma_3 - \lambda \gamma_6 - \lambda} + \right.$$

$$\left. + \frac{a_{10} \gamma_1 - \lambda \gamma_3 - \lambda + a_2 \gamma_2 \gamma_4}{\gamma_1 - \lambda \gamma_3 - \lambda \gamma_6 - \lambda} \right\} \tilde{T}$$

6) თუ $\gamma_1 \neq \lambda, \gamma_3 \neq \lambda, \gamma_1 = \gamma_3, \gamma_1 \neq \gamma_6, \lambda = \gamma_6, \gamma_3 \neq \gamma_6$, მაშინ გვექნება

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_0 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1 - \lambda} \tilde{T}, \quad \Psi_2 = \Psi_2^0 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1 - \lambda} \Phi_0 + \frac{\gamma_2 \gamma_4 + \gamma_5 \gamma_1 - \lambda}{\gamma_1 - \lambda \gamma_3 - \lambda} \tilde{T}, \\ \Psi_3 &= \Psi_3^0 + \frac{a_2}{\gamma_1 - \gamma_3} \Psi_2^0 + \frac{a_3 \gamma_1 + a_2 \gamma_4 \gamma_1 - \gamma_6 - a_2 \gamma_2 \gamma_4}{2 \gamma_1 \gamma_1 - \gamma_6} \Phi_0 + \\ &+ \frac{a_2 \gamma_4}{2 \gamma_1 \gamma_1 - \gamma_6} z \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} - \\ &- \frac{a_3 \gamma_2 \gamma_3 - \lambda + a_2 \gamma_5 \gamma_1 - \lambda + a_{10} \gamma_1 - \lambda \gamma_3 - \lambda + a_2 \gamma_2 \gamma_4}{\gamma_1 - \lambda \gamma_3 - \lambda \gamma_6 - \lambda} z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z}.\end{aligned}$$

7) თუ $\gamma_1 \neq \lambda, \gamma_3 \neq \lambda, \gamma_1 = \gamma_3, \gamma_1 = \gamma_6, \lambda = \gamma_6, \gamma_3 \neq \gamma_6$, მამინ გვექნება

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_0 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1 - \lambda} \tilde{T}, \quad \Psi_2 = \Psi_2^0 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1 - \lambda} \Phi_0 + \frac{\gamma_2 \gamma_4 + \gamma_5 \gamma_1 - \lambda}{\gamma_1 - \lambda \gamma_3 - \lambda} \tilde{T}, \\ \Psi_3 &= \Psi_3^0 + \frac{a_2}{2 \gamma_3} z \frac{\partial \Psi_2^0}{\partial z} + \frac{4 a_3 \gamma_1 + 3 a_2 \gamma_4}{8 \gamma_1^2} z \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} + \\ &+ \frac{a_2 a_4}{8 \gamma_1^2} z^2 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} - \\ &- \frac{a_3 \gamma_2 \gamma_3 - \lambda + a_2 \gamma_5 \gamma_1 - \lambda + a_{10} \gamma_1 - \lambda \gamma_3 - \lambda + a_2 \gamma_2 \gamma_4}{\gamma_1 - \lambda \gamma_3 - \lambda \gamma_6 - \lambda} \tilde{T}.\end{aligned}$$

8) თუ $\gamma_1 \neq \lambda, \gamma_3 = \lambda, \gamma_1 \neq \gamma_3, \gamma_1 \neq \gamma_6, \lambda \neq \gamma_6, \gamma_3 \neq \gamma_6$, მამინ გვექნება

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_0 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1 - \lambda} \tilde{T}, \quad \Psi_2 = \Psi_2^0 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1 - \lambda} \Phi_0 + \frac{\gamma_2 \gamma_4 + \gamma_5 \gamma_1 - \lambda}{\gamma_1 - \lambda \gamma_3 - \lambda} z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z}, \\ \Phi &= \Phi_0 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1 - \lambda} \tilde{T}, \quad \Psi_2 = \Psi_2^0 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1 - \lambda} \Phi_0 + \frac{\gamma_2 \gamma_4 + \gamma_5 \gamma_1 - \lambda}{\gamma_1 - \lambda \gamma_3 - \lambda} z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z}, \\ \Psi_3 &= \Psi_3^0 + \frac{a_2}{\gamma_6 - \gamma_3} \Psi_2^0 + \frac{a_2 \gamma_4 + a_2 \gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_3 - \gamma_1 \gamma_6 - \gamma_1} \Phi_0 + \frac{a_2 \gamma_1 \gamma_4 + a_2 \gamma_5 \gamma_1 - \lambda}{2 \lambda \gamma_1 - \lambda \gamma_6 - \lambda} z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \\ &+ \left\{ \frac{\gamma_2 a_2 \gamma_4 + a_3 \lambda \gamma_6 - \lambda + a_{10} \lambda + a_2 \gamma_5 \gamma_1 - \lambda \gamma_6 - \lambda}{\lambda \gamma_1 - \lambda \gamma_6 - \lambda^2} - \frac{a_2 \gamma_5 \gamma_6 \gamma_1 - \lambda - a_2 \gamma_2 \gamma_4 \gamma_6}{\lambda \gamma_1 - \lambda \gamma_6 - \lambda^2} \right\} \tilde{T}.\end{aligned}$$

9) თუ $\gamma_1 \neq \lambda, \gamma_3 = \lambda, \gamma_1 \neq \gamma_3, \gamma_1 = \gamma_6, \lambda \neq \gamma_6, \gamma_3 \neq \gamma_6$, მამინ გვექნება

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1 - \lambda} \tilde{T}, \quad \Psi_2 = \Psi_2^0 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1 - \lambda} \Phi_0 + \frac{\gamma_2 \gamma_4 + \gamma_5 \gamma_1 - \lambda}{\gamma_1 - \lambda \gamma_3 - \lambda} z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z},$$

$$\Psi_3 = \Psi_3^0 + \frac{a_2}{\gamma_6 - \gamma_3} \Psi_2^0 + \frac{a_2 \gamma_4 + a_3 \gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_3 - \gamma_1 \gamma_6 - \gamma_1} z \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} + \frac{a_2 \gamma_1 \gamma_4 + a_2 \gamma_5 \gamma_1 - \lambda}{2 \lambda \gamma_1 - \lambda \gamma_6 - \lambda} z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} +$$

$$\left[\frac{\gamma_2 a_2 \gamma_4 + a_3 \lambda \gamma_6 - \lambda + a_{10} \lambda + a_2 \gamma_5 \gamma_1 - \lambda \gamma_6 - \lambda}{\lambda \gamma_1 - \lambda \gamma_6 - \lambda^2} - \frac{a_2 \gamma_5 \gamma_6 \gamma_1 - \lambda - a_2 \gamma_2 \gamma_4 \gamma_6}{\lambda \left(\gamma_1 - \lambda \right) \left(\gamma_6 - \lambda \right)} \right] \tilde{T}.$$

10) თუ $\gamma_1 \neq \lambda, \gamma_3 \neq \lambda, \gamma_1 \neq \gamma_3, \gamma_1 = \gamma_6, \lambda \neq \gamma_6, \gamma_3 \neq \gamma_6$, მაშინ გვექნება

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1 - \lambda} \tilde{T}, \quad \Psi_2 = \Psi_2^0 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1 - \lambda} \Phi_0 + \frac{\gamma_2 \gamma_4 + \gamma_5 \gamma_1 - \lambda}{\gamma_1 - \lambda \gamma_3 - \lambda} z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z},$$

$$\Psi_3 = \Psi_3^0 + \frac{a_2}{\gamma_6 - \gamma_3} \Psi_2^0 + \frac{a_2 \gamma_4 + a_3 \gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_3 - \gamma_1 \gamma_6 - \gamma_1} \Phi_0 + \frac{a_2 \gamma_1 \gamma_4 + a_2 \gamma_5 \gamma_1 - \lambda}{2 \lambda \gamma_1 - \lambda \gamma_6 - \lambda} z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} +$$

$$\left[\frac{a_2 \gamma_2 \gamma_4 + \gamma_5 \lambda \gamma_6 - \lambda \gamma_3 - \lambda + a_{10} \lambda + a_2 \gamma_5 \gamma_3 - \lambda^2 \gamma_6 - \lambda}{\lambda \gamma_1 - \lambda \gamma_6 - \lambda^2} - \frac{2 a_2 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_6 - \lambda}{\lambda \left(\gamma_1 - \lambda \right) \left(\gamma_6 - \lambda \right)} - \frac{a_3 \gamma_2 \gamma_6 \left(\gamma_3 - \lambda \right) a_2 \gamma_2 \gamma_4 \gamma_6}{\lambda \left(\gamma_6 - \lambda \right) \left(\gamma_3 - \lambda \right)} \right] \tilde{T}$$

11) თუ $\gamma_1 = \lambda, \gamma_3 \neq \lambda, \gamma_1 \neq \gamma_3, \gamma_1 \neq \gamma_6, \lambda \neq \gamma_6, \gamma_3 = \gamma_6$, მაშინ გვექნება

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1 - \lambda} \tilde{T}, \quad \Psi_2 = \Psi_2^0 - \frac{\gamma_4}{\gamma_1 - \gamma_3} \Phi_0 + \frac{\gamma_2 \gamma_4 + \gamma_5 \gamma_1 - \lambda}{2 \lambda \gamma_1 - \lambda} z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z},$$

$$\Psi_3 = \Psi_3^0 + \frac{a_2}{2 \gamma_6} z \frac{\partial \Psi_2^0}{\partial z} + \frac{a_2 \gamma_4 + a_3 \gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_3 - \gamma_1 \gamma_6 - \gamma_1} \Phi_0 + \frac{a_2 \gamma_1 \gamma_4 + a_2 \gamma_5 \gamma_1 - \lambda}{2 \lambda \gamma_1 - \lambda \gamma_6 - \lambda} z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} +$$

$$\left[\frac{a_2 2 \gamma_2 \gamma_4 + \gamma_5 \lambda \gamma_6 - \lambda \gamma_3 - \lambda + a_{10} \lambda + a_2 \gamma_5 \gamma_3 - \lambda^2 \gamma_6 - \lambda}{\lambda \gamma_1 - \lambda \gamma_6 - \lambda^2} - \frac{2 a_2 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_6 - \lambda}{\lambda \gamma_1 - \lambda \gamma_6 - \lambda^2} - \frac{a_3 \gamma_2 \gamma_6 \gamma_3 - \lambda + a_2 \gamma_2 \gamma_4 \gamma_6}{\lambda \gamma_6 - \lambda^2 \gamma_3 - \lambda} \right] \tilde{T}.$$

12) თუ $\gamma_1 = \lambda, \gamma_3 \neq \lambda, \gamma_1 \neq \gamma_3, \gamma_1 \neq \gamma_6, \lambda \neq \gamma_6, \gamma_3 \neq \gamma_6$, მაშინ გვექნება

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1 - \lambda} \tilde{T}, \quad \Psi_2 = \Psi_2^0 - \frac{\gamma_4}{\gamma_1 - \gamma_3} \Phi_0 + \frac{\gamma_2 \gamma_4 + \gamma_5 \gamma_1 - \lambda}{2 \lambda \gamma_1 - \lambda} z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z},$$

$$\Psi_3 = \Psi_3^0 + \frac{a_2}{\gamma_6 - \gamma_3} \Psi_2^0 + \frac{a_2 \gamma_4 + a_3 \gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_3 - \gamma_1 \gamma_6 - \gamma_1} z \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} +$$

$$\left[\frac{a_2 \gamma_2 \gamma_4 + \gamma_5 \lambda \gamma_3 - \lambda + 10 \lambda \gamma_3 - \lambda^2 - 2 a_2 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \lambda}{2 \lambda \gamma_6 \gamma_3 - \lambda} + \frac{a_2 \gamma_2 \gamma_4 \gamma_3 - \lambda + a_3 \gamma_2 \gamma_3 - \lambda^2}{2 \lambda \gamma_6 \gamma_3 - \lambda} - \frac{a_3 \gamma_2 \gamma_3 - \lambda + a_2 \gamma_2 \gamma_4}{8 \lambda \gamma_6 \left(\gamma_3 - \lambda \right)} \right] z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z}.$$

13) თუ $\gamma_1 = \lambda, \gamma_3 = \lambda, \gamma_1 = \gamma_3, \gamma_1 \neq \gamma_6, \lambda \neq \gamma_6, \gamma_3 \neq \gamma_6$, მაშინ გვექნება

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_0 + \frac{\gamma_3}{2\lambda} z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z}, \\ \Psi_2 &= \Psi_2^0 - \frac{\gamma_4}{2\gamma_1} z \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} + \frac{4\gamma_2\gamma_4 + \lambda\gamma_5 - \gamma_2\gamma_4}{8\lambda\gamma_3} z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \frac{\gamma_2\gamma_4}{8\lambda\gamma_3} z^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2}, \\ \Psi_3 &= \Psi_3^0 + \frac{a_2}{\gamma_6 - \gamma_3} \Psi_2^0 + \frac{a_3\gamma_3\gamma_6 - a_3\gamma_1\gamma_3 - a_2\gamma_1\gamma_4 - 7a_2\gamma_2\gamma_4}{8\gamma_3\gamma_6 - \lambda^2} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} + \\ &+ \frac{a_2\gamma_4 + a_3\gamma_2 - \gamma_1}{2\gamma_3\gamma_6 - \gamma_1} z \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} + \frac{1}{8\gamma_3\gamma_6 - \gamma_1} \left[3a_2\gamma_6 - 7a_2\lambda - \gamma_2\gamma_4 + 4\gamma_6 - \lambda - a_3\gamma_2\gamma_3 + \right. \\ &\left. + 4a_2a_5\lambda - \gamma_6 - \lambda \right] z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \frac{8a_2\gamma_2\gamma_4}{8\lambda\gamma_3\gamma_6 - \lambda} z^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

14) თუ $\gamma_1 = \lambda, \gamma_3 = \lambda, \gamma_1 = \gamma_3, \gamma_1 = \gamma_6, \lambda = \gamma_6, \gamma_3 = \gamma_6$, ,

მაშინ გვექნება

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_0 + \frac{\gamma_3}{2\lambda} z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z}, \\ \Psi_2 &= \Psi_2^0 + \frac{\gamma_4}{2\gamma_1} z \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} + \frac{4\gamma_2\gamma_4 + \lambda\gamma_5 - \gamma_2\gamma_4}{8\lambda\gamma_3} z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \frac{\gamma_2\gamma_4}{8\lambda\gamma_3} z^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2}, \\ \Psi_3 &= \Psi_3^0 + \frac{a_2}{2\gamma_6} z \frac{\partial \Psi_2^0}{\partial z} + \frac{4a_2\gamma_3 - 3a_2\gamma_4}{8\gamma_3\lambda} z^2 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} + \frac{4a_2\gamma_3 - 3a_2\gamma_4}{2\gamma_3\gamma_6 - \gamma_1} z \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} + \\ &+ \frac{10a_2^2\gamma_2\gamma_4 + 12a_2\gamma_5\lambda + 12a_3\gamma_2\gamma_3 + 16a_{10}\gamma_3\lambda}{32\gamma_3\lambda^2} z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \\ &+ \frac{6a_2^2\gamma_2\gamma_4 + 4a_2\gamma_5\lambda + 4a_3\gamma_2\gamma_3}{32\gamma_3\lambda^2} z^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2} + \frac{a_2\gamma_2\gamma_4}{48\lambda^2\gamma_3} z^3 \frac{\partial^3 \tilde{T}}{\partial z^3}. \end{aligned}$$

2.1.3. (2.44)-ის გათვალისწინებით (2.44') ფორმულები შეგვიძლია ასეთი სახით გადავწეროთ

$$\begin{cases} u = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2c_4 + g}{2c_4} \Psi_3 + \frac{1}{2c_4} \Psi_2 \right) + \frac{1}{c_5} \frac{\partial \psi_1}{\partial y}, \\ v = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2c_4 + g}{2c_4} \Psi_3 + \frac{1}{2c_4} \Psi_2 \right) - \frac{1}{c_5} \frac{\partial \psi_1}{\partial x}, \\ w = -\frac{1}{2c_4} \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} - \frac{2a_2c_4 - 2a_8e_3 - a_2}{2c_4} \frac{\partial \Psi_3}{\partial z} - \frac{e_3}{c_4} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{cases} \quad (2.50)$$

$\Gamma_1(u^k, v^k), \Gamma_2(u^k, v^k)$ - ისთვის გვექნება:

$$\Gamma_1(u^k, v^k) = \frac{(2c_4 + g)a_2 - \gamma_3}{2c_4} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z^2} - \frac{(2c_4 + g)\gamma_6}{2c_4} \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial z^2} + \frac{(2c_4 + g)a_3 + \gamma_4}{2c_4} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2},$$

$$\Gamma_1(u^k, v^k) = -\frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2}.$$
(2.51)

$N_z, \Gamma_1(S_{xz}^k, S_{zy}^k)$ და $\Gamma_2(S_{xz}^k, S_{zy}^k)$ -თვის გვექნება:

$$N_z = \frac{2c_4 e_1 g - \gamma_6}{2c_4} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z^2} + \frac{a_4 - (2c_4 + g)\gamma_3}{2c_4} \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial z^2} + \frac{(2c_4 + g)a_5 \gamma_4 - 2c_4 e_1}{2c_4} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{(2c_4 a_5 + g)\gamma_5 + a_9}{2c_4} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2},$$

$$\Gamma_1(S_{xz}^k, S_{zy}^k) = \frac{2c_4 e_1 g - \gamma_6}{2c_4} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z^2} - \frac{a_4 - (2c_4 + g)\gamma_3}{2c_4} \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial z^2} - \frac{(2c_4 + g)a_5 \gamma_4 - 2c_4 e_1}{2c_4} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{(2c_4 a_5 + g)\gamma_5 + a_9}{2c_4} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2},$$

$$\Gamma_2(S_{xz}^k, S_{zy}^k) = c_5^2 \frac{\partial^3 \Psi_1}{\partial z^3}.$$
(2.52)

2.2. ფილის ელექტროდრეკადი

წონასწორობა

განვიხილოთ სასაზღვრო ამოცანა მართკუთხა ტრანსტროპული ფილისათვის, რომლის მდებარეობას x, y, z სივრცეში განვსაზღვრავთ შემდეგი უტოლებებით: $x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1, z_0 < z < z_1$.

ვთქვათ, რომ ფილის წახნაგებზე მოცემულია შემდეგი პირობები:

$$\text{როცა } x = x_i: \quad a) \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad u = 0, \quad S_{zx} = 0, \quad B = 0, \quad D_x = 0,$$

$$b) \quad T = 0, \quad K = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \varphi = 0.$$
(2.53)

$$\text{როცა } y = y_i: \quad a) \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad v = 0, \quad S_{zy} = 0, \quad B = 0, \quad D_y = 0,$$

$$b) \quad T = 0, \quad K = 0, \quad u = 0, \quad w = 0, \quad \varphi = 0$$
(2.54)

$$a) \quad \frac{\partial T}{\partial y} = F_{j1}(x, y), \quad b) \quad T = F_{j2}(x, y),$$

$$c) \quad \frac{\partial T}{\partial y} + \Theta_j T = F_{j3}(x, y),$$
(2.55)

როცა $z = z_i$:

$$\begin{aligned}
a) N_z &= F_{j1}(x, y), \quad S_{zx} = F_{j2}(x, y), \quad S_{zy} = F_{j3}(x, y); \\
b) w &= f_{j1}(x, y), \quad u = f_{j2}(x, y), \quad v = f_{j3}(x, y); \\
c) N_z &= F_{j1}(x, y), \quad u = f_{j2}(x, y), \quad v = f_{j3}(x, y); \\
d) w &= f_{j1}(x, y), \quad S_{zx} = F_{j2}(x, y), \quad S_{zy} = F_{j3}(x, y);
\end{aligned}
\tag{2.56}$$

როცა $z = z_i$:

$$a) \varphi = F_{j4}(x, y), \quad b) D_z = F_{j5}(x, y).
\tag{2.57}$$

განსახილავ ამოცანებთან დაკავშირებით უნდა აღინიშნოს ერთი მნიშვნელოვანი დეტალი.

თუ $z = z_0$ და $z = z_1$ ფუძეებზე სასაზღვრო პირობები ერთი და იგივე ტიპისაა, მაშინ შესაძლებელია ძირითადი ამოცანის დაყვანა უფრო მარტივი ამოცანების ამოხსნაზე. ამასთან, როგორც ქვემოთ დავრწმუნდებით ამ შემთხვევაში განტოლებათა და უცნობთა რაოდენობა ორჯერ შემცირდება. მართლაც, მაგალითისთვის განვიხილოთ ამოცანა, როცა $z = z_0$ და $z = z_1$ -ზე მოცემულია ძაბვები. განვიხილოთ $\bar{\Omega}_z = \{x_0 < x < x_1; y_0 < y < y_1\}$ არეში (2.6), (2.7), (2.8 a), (2.9), (2.10), (2.11),

(2.12) სასაზღვრო ამოცანა ((2.8 a)-ში როცა $j = 0$, მივიღოთ $z = -z_1$) აღნიშნოთ G_o და წარმოვადგინოთ

$$G_o = G_c + G_A$$

სახით. G_c და G_A აღნიშნავენ შესაბამისად (2.6), (2.7), $\overline{(2.8a)}$, (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) და (2.6), (2.7), $\overline{\overline{(2.8a)}}$, (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) სასაზღვრო ამოცანებს. $\overline{(2.8a)}$ -თი აღნიშნულია პირობები:

$$\begin{cases}
z = z_1 : \\
a) N_z = \frac{1}{2}(F_{11} + F_{01}), \quad S_{zy} = \frac{1}{2}(F_{11} - F_{01}), \quad S_{zy} = \frac{1}{2}(F_{11} - F_{01}), \quad \varphi = \frac{1}{2}(f_{11} - f_{01}); \\
z = -z_1 : \\
b) N_z = \frac{1}{2}(F_{11} + F_{01}), \quad S_{zy} = \frac{1}{2}(F_{11} - F_{01}), \quad S_{zy} = \frac{1}{2}(F_{11} - F_{01}), \quad \varphi = \frac{1}{2}(f_{11} - f_{01}).
\end{cases}
\tag{2.58}$$

ხოლო $\overline{\overline{(2.8a)}}$ -თი აღნიშნულია პირობები:

$$\begin{cases}
 z = z_1 : \\
 a) N_z = \frac{1}{2}(F_{11} - F_{01}), S_{zy} = \frac{1}{2}(F_{11} + F_{01}), \\
 S_{zy} = \frac{1}{2}(F_{11} + F_{01}), \varphi = \frac{1}{2}(f_{11} - f_{01}); \\
 z = -z_1 : \\
 b) N_z = -\frac{1}{2}(F_{11} - F_{01}), S_{zy} = \frac{1}{2}(F_{11} + F_{01}), \\
 S_{zy} = \frac{1}{2}(F_{11} + F_{01}), \varphi = \frac{1}{2}(f_{11} - f_{01}).
 \end{cases} \quad (2.59)$$

ამგვარად G_o სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა დაიყვანება (2.6), (2.7), $\overline{(2.8a)}$, (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) და (2.6), (2.7), $\overline{\overline{(2.8a)}}$, (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) სასაზღვრო ამოცანების სუპერპოზიციზე. რადგან $z = 0$ სიბრტყე ამ ამოცანებისათვის წარმოადგენს სიმეტრიის ან ანტისიმეტრიის სიბრტყეს, ამიტომ (2.54) და (2.55)-ის ნაცვლად ფილისათვის შეგვიძლია განვიხილოთ შემდეგ:

$$\begin{cases}
 z = z_1 : \\
 a) N_z = \frac{1}{2}(F_{11} + F_{01}), S_{zx} = \frac{1}{2}(F_{11} - F_{01}), \\
 S_{zy} = \frac{1}{2}(F_{11} - F_{01}), \varphi = \frac{1}{2}(f_{11} - f_{01}); \\
 z = 0 : \\
 b) w = 0, S_{zx} = 0, S_{zy} = 0, D_z = 0.
 \end{cases}$$

ან

$$\begin{cases}
 z = z_1 : \\
 a) N_z = \frac{1}{2}(F_{11} + F_{01}), S_{zx} = \frac{1}{2}(F_{11} - F_{01}), \\
 S_{zy} = \frac{1}{2}(F_{11} - F_{01}), \varphi = \frac{1}{2}(f_{11} - f_{01}); \\
 z = 0 : \\
 b) w = 0, \Gamma_1(S_{zx}, S_{zy}) = 0, \Gamma_2(S_{zx}, S_{zy}) = 0, D_z = 0.
 \end{cases} \quad (2.60)$$

და

$$\left\{ \begin{array}{l} z = z_1 : \\ a) N_z = \frac{1}{2} \left(F_{11} - F_{01} \right), S_{zy} = \frac{1}{2} \left(F_{11} + F_{01} \right), \\ S_{zy} = \frac{1}{2} \left(F_{11} + F_{01} \right), \varphi = \frac{1}{2} \left(f_{11} - f_{01} \right); \\ z = 0 : \\ b) N_z = 0, u = 0, v = 0, \varphi = 0. \end{array} \right.$$

ან

$$\left\{ \begin{array}{l} z = z_1 : \\ a) N_z = \frac{1}{2} \left(F_{11} - F_{01} \right), S_{zy} = \frac{1}{2} \left(F_{11} + F_{01} \right), \\ S_{zy} = \frac{1}{2} \left(F_{11} + F_{01} \right), \varphi = \frac{1}{2} \left(f_{11} - f_{01} \right); \\ z = 0 : \\ b) N_z = 0, \Gamma_1(u, v) = 0, \Gamma_2(u, v) = 0, \varphi = 0. \end{array} \right. \quad (2.61)$$

ამგვარად G_o [(2.6), (2.7), (2.8a), (2.9), (2.10), (2.11), (2.12)] ამოცანა დაყვანილია შემდეგი G_c [(2.6), (2.7), (2.8a), (2.9), (2.10), (2.11), (2.12)] და G_A [(2.6), (2.7), (2.8a), (2.9), (2.10), (2.11), (2.12)] ამოცანების ამოხსნაზე. როდესაც $z = -z_1$ და $z = z_1$ წახნაგებზე მოცემულია სახის ერთიდაიგივე ტიპის სასაზღვრო პირობები უფრო მარტივ სასაზღვრო ამოცანაზე დაყვანის მეთოდი ისეთივეა როგორც ზემოთმოყვანილ შემთხვევაში.

ახლა ამოვხსნათ G_o სასაზღვრო ამოცანა, რომელიც დაიყვანება G_c და G_A ამოცანების ამოხსნაზე.

გადაადგილების ვექტორის u, v, w კომპონენტების, φ ელექტრული პოტენციალი, ასევე $\Gamma_1(S_{zx}, S_{zy}), \Gamma_2(S_{zx}, S_{zy})$ -ის გამოსახულებები, როდესაც

$\gamma_1 \neq \gamma_3, \gamma_1 \neq \gamma_6, \gamma_6 \neq \gamma_3, T = 0$ ასეთი სახით შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = d_1 \frac{\partial \psi_2^0}{\partial x} + d_2 \frac{\partial \Psi_3^0}{\partial x} + d_3 \frac{\partial \Phi^0}{\partial x} + \frac{1}{c_5} \frac{\partial \Psi_1}{\partial y}, \\ v = d_1 \frac{\partial \psi_2^0}{\partial y} + d_2 \frac{\partial \Psi_3^0}{\partial y} + d_3 \frac{\partial \Phi^0}{\partial y} - \frac{1}{c_5} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x}, \\ w = d_4 \frac{\partial \psi_2^0}{\partial y} - d_5 \frac{\partial \Psi_3^0}{\partial y} + d_6 \frac{\partial \Phi^0}{\partial y}. \end{array} \right. \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned}
N_z &= d_7 \frac{\partial^2 \psi_2^0}{\partial z^2} + d_8 \frac{\partial^3 \Psi_3^0}{\partial z^3} + d_9 \frac{\partial^3 \Phi^0}{\partial z^3}, \\
\Gamma_1(S_{xz}^k, S_{zy}^k) &= -d_7 \frac{\partial^2 \psi_2^0}{\partial z^2} - d_8 \frac{\partial^3 \Psi_3^0}{\partial z^3} - d_9 \frac{\partial^3 \Phi^0}{\partial z^3}, \\
\Gamma_2(S_{xz}^k, S_{zy}^k) &= c_5^2 \frac{\partial^3 \Psi_1}{\partial z^3}.
\end{aligned} \tag{2.63}$$

სადაც

$$\begin{cases}
d_1 = \frac{\gamma_6 - \gamma_3 + a_2(2c_3c_4 + g)}{2c_4(\gamma_6 - \gamma_3)}, & d_2 = \frac{2c_4 + g}{2c_4}, \\
d_3 = \frac{\gamma_4(\gamma_6 - \gamma_1) + a_3(\gamma_6 - \gamma_1) + a_2\gamma_4}{2c_4(\gamma_6 - \gamma_1)(\gamma_3 - \gamma_1)}, & a_4 = \frac{c_1c_2 - c_3^2}{c_1}, \\
d_5 = \frac{a_2\gamma_6 - \gamma_3 - 2c_4a_2^2 - 2e_3a_2a_8 + a_2^2g}{2c_4a_2\gamma_6 - \gamma_3}, \\
d_6 = \frac{a_2\gamma_6(\gamma_6 - \gamma_1) - (2c_4a_2 + 2e_3a_8 - a_2g)(a_2\gamma_4 + a_3\gamma_3 - a_3\gamma_1)}{2c_4a_2(\gamma_6 - \gamma_1)(\gamma_3 - \gamma_1)}, \\
d_7 = \frac{1}{2a_2c_4} \left[a_2(c_2g - 2c_3c_4) - 2a_8(2e_8c_2 + c_4e_2) - (2c_3c_4 + c_2g) \times \right. \\
\left. \times (a_1a_2 - a_3a_8 - a_2^2g) + 2a_3c_3(c_4 + g)(\gamma_6 - \gamma_3) - 2e_2c_1 + (a_1c_3 - c_2)(\gamma_6 - \gamma_3) \right] \\
d_8 = \frac{a_2c_2g - 2c_3c_4 - 2a_8(2e_8c_2 + c_4e_2) - 2c_3c_4 + c_2g}{2a_2c_4} \frac{a_1a_2 - a_3a_8 - a_2^2g}{2a_2c_4}, \\
d_9 = \frac{1}{2a_2c_4} \frac{\gamma_3 - \gamma_1}{\gamma_6 - \gamma_1} \left[a_2c_2g - 2c_3c_4 - 2a_8(2e_8c_2 + c_4e_2) - 2c_3c_4 + c_2g \right] \times \\
\times a_1a_2 - a_3a_8 - a_2^2g \left[a_2\gamma_4 + a_3\gamma_6 - \gamma_1 \right] + \left[2a_3c_3c_4 + g - a_1c_3 - c_2 \right] \times \\
\times \gamma_6 - \gamma_1 \gamma_4 + \left[c_3a_5 - a_3g - 2e_3c_3 - 2e_2c_4 \right] + \left(\gamma_6 - \gamma_1 \right) \left(\gamma_3 - \gamma_1 \right) \\
d_{10} = \frac{a_8}{\gamma_6 - \gamma_3}, \\
d_{11} = \frac{a_2\gamma_3 - a_8\gamma_1 + a_2a_3(\gamma_6 - \gamma_1) + a_2^2\gamma_4}{a_8(\gamma_6 - \gamma_1)(\gamma_3 - \gamma_1)}, \\
c = \left(\frac{c_4}{c_5} \right)^2, \quad \bar{a} = \frac{a_8}{a_2}.
\end{cases}$$

(2.6), (2.7), (2.8 a), (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა, როგორც ვნახეთ, მიიყვანება (2.6), (2.7), $\overline{(2.8a)}$, (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) (G_C ამოცანა) და G_A (2.6), (2.7), $\overline{\overline{(2.8a)}}$, (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) (G_A ამოცანა) ამოცანების ამოხსნაზე.

G_C ამოცანის ამოხსნისას $\Psi_1, \psi_2^0, \overline{\Psi_3^0}$ და Φ^0 ფუნქციები ლებულობენ შემდეგ სახეს:

$$\begin{cases} \Psi_1 = \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} A_{1mn} e^{-p_1 z_1} ch(p_0 z) \cos[m(x-x_0)] \cos[n(y-y_0)], \\ \psi_2^0 = \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} A_{2mn} e^{-p_2 z_1} ch(p_2 z) \sin[m(x-x_0)] \sin[n(y-y_0)], \\ \overline{\Psi_3^0} = \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} A_{3mn} e^{-p_2 z_1} ch(p_3 z) \sin[m(x-x_0)] \sin[n(y-y_0)], \\ \Phi^0 = \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} A_{4mn} e^{-p_3 z_1} ch(p_3 z) \sin[m(x-x_0)] \sin[n(y-y_0)], \end{cases} \quad (2.64)$$

სადაც, $p_1 = c^{0.5} p(m, n) \geq 0$, $p_2 = \gamma_6^{-0.5} p(m, n) \geq 0$, $p_3 = \gamma_1^{-0.5} p(m, n) \geq 0$

$$p^2 = m^2 + n^2, \quad m = \frac{\pi \bar{m}}{x_1 - x_0}, \quad n = \frac{\pi \bar{n}}{y_1 - y_0}.$$

(2.60)-ის (2.59)-ში გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} N_z &= \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \left[d_7 p_1^2 e^{-p_1 z_1} ch(p_1 z) A_{1mn} + d_8 p_2^2 e^{-p_2 z_1} ch(p_1 z) A_{2mn} + \right. \\ &\left. + d_9 p_3^2 e^{-p_3 z_1} ch(p_1 z) A_{3mn} \right] \sin[m(x-x_0)] \sin[n(y-y_0)], \\ \Gamma_1(S_{xz}^k, S_{zy}^k) &= \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \left[-d_7 p_1^3 e^{-p_1 z_1} ch(p_1 z) A_{1mn} - d_8 p_2^3 e^{-p_2 z_1} ch(p_1 z) A_{2mn} - \right. \\ &\left. - d_9 p_3^3 e^{-p_3 z_1} ch(p_1 z) A_{3mn} \right] \sin[m(x-x_0)] \sin[n(y-y_0)], \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\Gamma_2(S_{xz}^k, S_{zy}^k) = \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} c^2 p_1^3 e^{-p_1 z_1} ch(p_1 z) A_{1mn} \cdot \cos[m(x-x_0)] \cos[n(y-y_0)],$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \left[d_{10} p_1^2 e^{-p_1 z_1} ch(p_1 z) A_{1mn} + \bar{a} p_2^2 e^{-p_2 z_1} ch(p_1 z) A_{2mn} + \right. \\ &\left. + d_{11} p_3^2 e^{-p_3 z_1} ch(p_1 z) A_{3mn} \right] \sin[m(x-x_0)] \sin[n(y-y_0)] \end{aligned}$$

$N_z, \Gamma_1(S_{xz}^k, S_{zy}^k), \Gamma_2(S_{xz}^k, S_{zy}^k), \varphi$ გამოსახულებები გავუტოლოთ $z = z_1$

წახნაგებზე მოცემული ფუნქციების ფურიეს ტრიგონომეტრიულ მწკრივებს. ამის შედეგად ოთხი საძიებელი A_{1mn} სიდიდისათვის მივიღებთ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{aligned}
 c^2 p_1^3 e^{-p_1 z_1} \operatorname{ch}(p_1 z) A_{1mn} &= \overline{F}_{3mn}, \\
 d_7 p_1^2 e^{-p_1 z_1} \operatorname{ch}(p_1 z_1) A_{1mn} + d_8 p_2^2 e^{-p_2 z_1} \operatorname{ch}(p_2 z_1) A_{2mn} + \\
 + d_9 p_3^2 e^{-p_3 z_1} \operatorname{ch}(p_3 z_1) A_{3mn} &= \overline{F}_{1mn} \\
 -d_7 p_1^3 e^{-p_1 z_1} \operatorname{ch}(p_1 z_1) A_{1mn} - d_8 p_2^3 e^{-p_2 z_1} \operatorname{ch}(p_2 z_1) A_{2mn} - \\
 -d_9 p_3^3 e^{-p_3 z_1} \operatorname{ch}(p_3 z_1) A_{3mn} &= \overline{F}_{2mn}, \\
 d_{10} p_1^2 e^{-p_1 z_1} \operatorname{ch}(p_1 z) A_{1mn} + \overline{a} p_2^2 e^{-p_2 z_1} \operatorname{ch}(p_2 z) A_{2mn} + \\
 + d_{11} p_3^2 e^{-p_3 z_1} \operatorname{ch}(p_3 z) A_{3mn} &= \overline{f}_{1mn}
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

სადაც \overline{f}_{imn} და \overline{F}_{imn} - შესაბამისად \overline{f}_i და \overline{F}_i ფუნქციების ფურიეს კოეფიციენტებია.

(2.62) სისტემის ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned}
 A_{1mn} &= \frac{\overline{F}_{3mn}}{c^2 p_1^3 e^{-p_1 z_1} \operatorname{ch}(p_1 z)}, \\
 A_{1mn} &= \frac{1}{\Lambda_p} \left[\overline{F}_{1mn} (\tilde{d}_8 \tilde{d}_{11} \gamma_6^{-0.5} - \overline{a} \tilde{d}_9 \gamma_1^{-0.5}) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_1 p}) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_6 p}) p^4 + \right. \\
 &+ (\overline{f}_{1mn} \tilde{d}_8 \tilde{d}_9 \gamma_1^{-0.5} p^5 - \overline{F}_{2mn} \tilde{d}_8 \tilde{d}_{11} \gamma_1^{-0.5} p^3) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_1 p}) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_6 p}) + \\
 &+ (\overline{F}_{2mn} \overline{a} \tilde{d}_9 p^3 - \overline{f}_{1mn} \tilde{d}_8 \tilde{d}_9 \gamma_6^{-0.5} p^5) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_1 p}) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_6 p}) \left. \right], \\
 A_{2mn} &= \frac{1}{\Lambda_p} \left[(\overline{F}_{2mn} \tilde{d}_7 \tilde{d}_{11} p^3 - \overline{f}_{1mn} \tilde{d}_7 \tilde{d}_9 \gamma_1^{-0.5} p^5) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_1 p}) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_3 p}) + \right. \\
 &+ \overline{F}_{2mn} (\tilde{d}_8 \tilde{d}_9 \gamma_1^{-0.5} + \tilde{d}_7 \tilde{d}_{11} \gamma_3^{-0.5}) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_1 p}) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_3 p}) - \\
 &- (\overline{f}_{1mn} \tilde{d}_7 \tilde{d}_9 \gamma_3^{-0.5} p^5 + \overline{F}_{2mn} \tilde{d}_{10} \tilde{d}_9 p^3) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_1 p}) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_3 p}) \left. \right], \\
 A_{3mn} &= \frac{1}{\Lambda_p} \left[(\overline{f}_{1mn} \tilde{d}_7 \tilde{d}_8 \gamma_6^{-0.5} - \overline{F}_{2mn} \overline{a} \tilde{d}_7 p^3) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_3 p}) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_6 p}) + \right. \\
 &+ (\overline{F}_{2mn} \tilde{d}_8 \tilde{d}_{10} p^3 + \overline{f}_{1mn} \tilde{d}_7 \tilde{d}_8 \gamma_3^{-0.5} p^5) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_3 p}) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_6 p}) - \\
 &- \overline{F}_{3mn} (\overline{a} \tilde{d}_7 \gamma_3^{-0.5} + \tilde{d}_{10} \tilde{d}_8 \gamma_6^{-0.5}) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_3 p}) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_6 p}) p^4 \left. \right],
 \end{aligned}$$

სადაც მიღებულია შემდეგი აღნიშვნები: $\tilde{\gamma}_1 = \gamma_1 z_1, \tilde{\gamma}_3 = \gamma_3 z_1, \tilde{\gamma}_6 = \gamma_6 z_1;$

$$\overline{d}_7 = d_7 \gamma_3^{-1}, \overline{d}_8 = d_8 \gamma_6^{-1}, \overline{d}_9 = d_9 \gamma_1^{-1};$$

$$\Lambda_p = \begin{vmatrix} \tilde{d}_7 p^2 (1 - e^{-\tilde{\gamma}_3 p}) & \tilde{d}_8 p^2 (1 - e^{-\tilde{\gamma}_6 p}) & \tilde{d}_9 p^2 (1 - e^{-\tilde{\gamma}_1 p}) \\ -\tilde{d}_7 \gamma_3^{-0.5} p^2 (1 - e^{-\tilde{\gamma}_3 p}) & -\tilde{d}_8 \gamma_6^{-0.5} p^3 (1 - e^{-\tilde{\gamma}_6 p}) & -\tilde{d}_9 \gamma_1^{-0.5} p^2 (1 - e^{-\tilde{\gamma}_1 p}) \\ \tilde{d}_{10} p (1 - e^{-\tilde{\gamma}_3 p}) & \bar{a} p (1 - e^{-\tilde{\gamma}_6 p}) & \tilde{d}_{11} p^2 (1 - e^{-\tilde{\gamma}_1 p}) \end{vmatrix}.$$

ანალოგიურად G_a ამოცანისათვის განისაზღვრება $B_{1mn}, B_{2mn}, B_{3mn}, B_{4mn}$ კოეფიციენტები. მათ აქვთ შემდეგი სახე:

$$B_{1mn} = \frac{\bar{F}_{3mn}}{c^2 p_1^3 e^{-p_1 z_1} ch(p_1 z)},$$

$$B_{2mn} = \frac{1}{\Lambda_p} \left[\bar{F}_{1mn} (\tilde{d}_8 \tilde{d}_{11} \gamma_6^{-0.5} - \bar{a} \tilde{d}_9 \gamma_1^{-0.5}) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_1 p}) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_6 p}) p^4 + \right. \\ \left. + (\bar{f}_{1mn} \tilde{d}_8 \tilde{d}_9 \gamma_1^{-0.5} p^5 - \bar{F}_{2mn} \tilde{d}_8 \tilde{d}_{11} \gamma_1^{-0.5} p^3) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_1 p}) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_6 p}) + \right. \\ \left. + (\bar{F}_{2mn} \bar{a} \tilde{d}_9 p^3 - \bar{f}_{1mn} \tilde{d}_8 \tilde{d}_9 \gamma_6^{-0.5} p^5) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_1 p}) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_6 p}) \right],$$

$$B_{3mn} = \frac{1}{\Lambda_p} \left[(\bar{F}_{2mn} \tilde{d}_7 \tilde{d}_{11} p^3 - \bar{f}_{1mn} \tilde{d}_7 \tilde{d}_9 \gamma_1^{-0.5} p^5) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_1 p}) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_3 p}) + \right. \\ \left. + \bar{F}_{2mn} (\tilde{d}_8 \tilde{d}_9 \gamma_1^{-0.5} + \tilde{d}_7 \tilde{d}_{11} \gamma_3^{-0.5}) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_1 p}) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_3 p}) - \right. \\ \left. - (\bar{f}_{1mn} \tilde{d}_7 \tilde{d}_9 \gamma_3^{-0.5} p^5 + \bar{F}_{2mn} \tilde{d}_{10} \tilde{d}_9 p^3) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_1 p}) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_3 p}) \right],$$

$$B_{4mn} = \frac{1}{\Lambda_p} \left[(\bar{f}_{1mn} \tilde{d}_7 \tilde{d}_8 \gamma_6^{-0.5} - \bar{F}_{2mn} \bar{a} \tilde{d}_7 p^3) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_3 p}) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_6 p}) + \right. \\ \left. + (\bar{F}_{2mn} \tilde{d}_8 \tilde{d}_{10} p^3 + \bar{f}_{1mn} \tilde{d}_7 \tilde{d}_8 \gamma_3^{-0.5} p^5) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_3 p}) (1 - e^{-\tilde{\gamma}_6 p}) - \right.$$

და შესაბამის დეტერმინანტს აქვს ასეთი სახე:

$$\Lambda_p = \begin{vmatrix} \tilde{d}_7 p^2 (1 - e^{-\tilde{\gamma}_3 p}) & \tilde{d}_8 p^2 (1 - e^{-\tilde{\gamma}_6 p}) & \tilde{d}_9 p^2 (1 - e^{-\tilde{\gamma}_1 p}) \\ -\tilde{d}_7 \gamma_3^{-0.5} p^2 (1 + e^{-\tilde{\gamma}_3 p}) & -\tilde{d}_8 \gamma_6^{-0.5} p^3 (1 + e^{-\tilde{\gamma}_6 p}) & -\tilde{d}_9 \gamma_1^{-0.5} p^2 (1 + e^{-\tilde{\gamma}_1 p}) \\ \tilde{d}_{10} p (1 + e^{-\tilde{\gamma}_3 p}) & \bar{a} p (1 + e^{-\tilde{\gamma}_6 p}) & \tilde{d}_{11} p^2 (1 + e^{-\tilde{\gamma}_1 p}) \end{vmatrix}$$

$A_{1mn}, A_{2mn}, A_{3mn}, A_{4mn}$ -ის და $B_{1mn}, B_{2mn}, B_{3mn}, B_{4mn}$ -ის მიღებული მნიშვნელობები შევიტანოთ (2.58)-ში და ამით მოძებნილია G_c და G_a ამოცანების ამოხსნა. ამის შემდეგ ადვილია G_c და G_a ამოცანების ამოხსნის აგება, ხოლო ამ ამოხსნების დახმარებით აიგება (2.6), (2.7), (2.8 a), (2.9), (2.10), (2.11), (2.12)

სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა. სავსებით ანალოგიურად ამოიხსნება სხვა სასაზღვრო ამოცანები.

ადვილად დამტკიცდება ფუნქციონალური მწკრივების კრებადობა $\bar{\Omega}_z = \{x_0 < x < x_1; y_0 < y < y_1\}$ არეში.

როგორც, (2.58) ტოლობიდან ჩანს, შეიძლება მოიძებნება ისეთი q დადებითი მუდმივი, რომ მწკრივი

$$\sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} q (\bar{F}_{1mn} + \bar{F}_{2mn} + \bar{F}_{3mn} + \bar{F}_{1mn})$$

წარმოადგენს იმ ფუნქციონალური მწკრივების მაჟორანტს, რომლებითაც წარმოიდგინება ძაბვისა და გადადგილების მდგენელები (2.58) ფორმულების თანახმად.

მტკიცდება, რომ მიღებული ამოხსნები ერთადერთია. ეს დამტკიცებაც აქ არ მოგვყავს.

შენიშვნა. როგორც უკვე დავრწმუნდით, ყველა სასაზღვრო ამოცანისათვის საძიებელი სიდიდეებისათვის მიიღება უსასრულო ალგებრულ განტოლებათა სისტემა კვაზდიაგონალური მატრიცით, რომელიც შედგება დიაგონალური ბლოკებისაგან. Λ_p მატრიცაზე ელემენტალური გარდაქმნების შემდეგ შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ სისტემის $\det \Lambda_p \neq 0$. როდესაც $p \rightarrow \infty$.

2.3. ელექტროდრეკადი წონასწორობა გეგმაში

მართკუთხა ფილისათვის

მეთოდოლოგია, რომელიც გამოვიყენეთ წინა პარაგრაფში სასაზღვრო ამოცანების ამოსახსნელად, არ გამოდგება იმ შემთხვევაში, როცა ფილის ორ მოპირდაპირე წახნაგზე სხვადასხვა ტიპის სასაზღვრო პირობებია მოცემული. ამ ამოცანებისთვის ვერ გამოვიყენებთ სუპერპოზიციის პრინციპს და სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნება ჩვეულებრივი ხერხით.

ვთქვათ ფილის წანაგებზე მოცემულია (2.49), (2.50) სასაზღვრო პირობები, ხოლო $z = z_0$ და $z = z_1$ ფუძეებზე მოცემულია შემდეგი სასაზღვრო პირობები;

$$\begin{aligned} a) \quad \frac{\partial T}{\partial y} &= F_{j1}(x, y), & b) \quad T &= F_{j2}(x, y), \\ c) \quad \frac{\partial T}{\partial y} + \Theta_j T &= F_{j3}(x, y), \end{aligned} \quad (2.67)$$

როცა $z = z_i$:

$$\begin{aligned} a) \quad N_z &= F_{j1}(x, y), \quad S_{zx} = F_{j2}(x, y), \quad S_{zy} = F_{j3}(x, y); \\ b) \quad w &= f_{j1}(x, y), \quad u = f_{j2}(x, y), \quad v = f_{j3}(x, y); \\ c) \quad N_z &= F_{j1}(x, y), \quad u = f_{j2}(x, y), \quad v = f_{j3}(x, y); \\ d) \quad w &= f_{j1}(x, y), \quad S_{zx} = F_{j2}(x, y), \quad S_{zy} = F_{j3}(x, y); \end{aligned} \quad (2.68)$$

როცა $z = z_i$:

$$a) \quad \varphi = F_{j4}(x, y), \quad b) \quad D_z = F_{j5}(x, y). \quad (2.69)$$

სასაზღვრო ამოცანის დასმა იგივეა, რაც წინა პარაგრაფში.

$\Psi_1^0, \psi_2^0, \Psi_3^0$ და Φ^0 ფუნქციების გამოყენებით შესაძლებელია ამოწერა N_z

$\Gamma_1(S_{xz}^k, S_{zy}^k), \Gamma_2(S_{xz}^k, S_{zy}^k), w, \Gamma_1(u^k, v^k), \Gamma_2(u^k, v^k), \varphi$ გამოსახულებებისათვის

$$\begin{aligned} N_z &= d_7 \frac{\partial^2 \psi_2^0}{\partial z^2} + d_8 \frac{\partial^3 \Psi_3^0}{\partial z^3} + d_9 \frac{\partial^3 \Phi^0}{\partial z^3}, \\ \Gamma_1(S_{xz}^k, S_{zy}^k) &= -d_7 \frac{\partial^2 \psi_2^0}{\partial z^2} - d_8 \frac{\partial^3 \Psi_3^0}{\partial z^3} - d_9 \frac{\partial^3 \Phi^0}{\partial z^3}, \\ \Gamma_2(S_{xz}^k, S_{zy}^k) &= c_5^2 \frac{\partial^3 \Psi_1^0}{\partial z^3}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\begin{cases} w = d_4 \frac{\partial \psi_2^0}{\partial y} - d_5 \frac{\partial \Psi_3^0}{\partial y} + d_6 \frac{\partial \Phi^0}{\partial y}, \\ \varphi = d_{10} \frac{\partial \psi_2^0}{\partial y} + \bar{a} \frac{\partial \Psi_3^0}{\partial y} + d_{11} \frac{\partial \Phi^0}{\partial y}, \end{cases} \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1(u, v) &= d_{12} \frac{\partial^2 \Psi_2^0}{\partial z^2} - d_{13} \frac{\partial^2 \Psi_3^0}{\partial z^2} + d_{14} \frac{\partial^2 \Phi^0}{\partial z^2}, \\ \Gamma_2(u, v) &= -\frac{c}{c_5} \frac{\partial^2 \Psi_1^0}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

სადაც

$$d_{12} = \frac{2c_4 a_2 + a_2 g - 2a_1 c_4 \gamma_6 - \gamma_1}{2c_4 \gamma_6 - \gamma_1} - \frac{2c_4 + g a_1 a_2 - a_3 a_8 - a_2^2 g}{2c_4 \gamma_6 - \gamma_1},$$

$$d_{13} = \frac{2c_4 + g a_1 a_2 - a_3 a_8 - a_2^2 g}{2a_2 c_4},$$

$$d_{14} = \frac{1}{2a_2 c_4 \gamma_3 - \gamma_1 \gamma_6 - \gamma_1} \left[2c_4 a_2 + a a_2 g - a_1 \times \right. \\ \left. \times \gamma_6 - \gamma_1 a_2 \gamma_4 \right].$$

$\Psi_1, \psi_2^0, \Psi_3^0$ და Φ^0 ფუნქციები წარმოვადგინოთ ასეთი სახით:

$$\begin{cases} \psi_1^0 = Z_1(z) \psi_{mn}^1, \psi_2^0 = Z_2(z) \psi_{mn}^2, \\ \Psi_3^0 = Z_3(z) \psi_{mn}^3, \Phi^0 = Z_4(z) \psi_{mn}^4. \end{cases}$$

სადაც ψ_{mn} - არატრივიალური ამონახსნია შემდეგი შტურმ-ლიუვილის ამოცანის:

$$\Delta_2 \psi_{mn}^i + \gamma_3 \frac{\partial^2 \psi_{mn}^i}{\partial z^2} = 0, \quad (\text{I})$$

$$a) \psi_{mn}^i = 0;$$

$$\text{როცა } x = x_i: \quad b) \frac{\partial^2 \psi_{mn}^i}{\partial x^2} = 0; \quad (\text{II})$$

$$a) \psi_{mn}^i = 0;$$

$$\text{როცა } y = y_i: \quad b) \frac{\partial^2 \psi_{mn}^i}{\partial y^2} = 0; \quad (\text{III})$$

(II) და (III) პირობები გამომდინარეობს (2.49) და (2.50) პირობებიდან.

ψ_{mn}^i ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ნამრავლია:

$$\sin(mx) \cdot \sin(ny), \text{ ან } \sin(mx) \cdot \cos(ny), \text{ ან } \cos(mx) \cdot \sin(ny), \text{ ან}$$

$$\cos(mx) \cdot \cos(ny), \text{ ხოლო } Z_1(z) \text{ შემდეგი განტოლების ამონახსნია}$$

$$\frac{\partial^2 Z_i(z)}{\partial z^2} - p_i Z_i(z) = 0,$$

სადაც $i = 1, 2, 3, 4$ და $p_1 = c^{-0.5} p(m, n) \geq 0, p_2 = \gamma_3^{-0.5} p(m, n) \geq 0 .$

$p_3 = \gamma_6^{-0.5} p(m, n) \geq 0, p_4 = \gamma_1^{-0.5} p(m, n) \geq 0 .$ კერძოდ, განვიხილოთ შემდეგი (2.6), (2.7), (2.49 b), (2.50 b), (2.64 a), (2.65 a) სასაზღვრო ამოცანა. ამ შემთხვევაში

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_1 = \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \left[A_{1mn} e^{-p_1 z} + B_{1mn} e^{-p_1(z-z_1)} \right] \cos(mx) \cos(ny), \\ \Psi_2^0 = \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \left[A_{2mn} e^{-p_1 z} + B_{2mn} e^{-p_1(z-z_1)} \right] \sin(mx) \sin(ny), \\ \Psi_3^0 = \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \left[A_{3mn} e^{-p_1 z} + B_{3mn} e^{-p_1(z-z_1)} \right] \sin(mx) \sin(ny), \\ \Phi^0 = \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \left[A_{4mn} e^{-p_1 z} + B_{4mn} e^{-p_1(z-z_1)} \right] \sin(mx) \sin(ny), \end{array} \right. \quad (2.73)$$

სადაც $m = \frac{\pi \bar{m}}{x_1}, n = \frac{\pi \bar{n}}{y_1}, \bar{m}, \bar{n} = 0, 1, 2, \dots$ (\bar{m} და \bar{n} ერთდროულად არ არის ნულის

ტოლი)

თუ გავითვალისწინებთ (2.66), (2.67), (2.68) ფორმულებს, გვექნება

$$\begin{aligned} N_z &= \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \left[d_7 p_1^2 e^{-p_1 z} A_{1mn} + d_7 p_1^2 e^{-p_1(z-z_1)} B_{1mn} + \right. \\ &\quad + d_8 p_2^2 e^{-p_2 z} A_{2mn} + d_8 p_2^2 e^{-p_2(z-z_1)} B_{2mn} + \\ &\quad \left. + d_9 p_3^3 e^{-p_3 z} A_{3mn} + d_9 p_3^3 e^{-p_3(z-z_1)} B_{3mn} \right] \sin(mx) \sin(ny) \\ \Gamma_1(S_{xz}^k, S_{zy}^k) &= \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \left[-d_7 p_1^3 e^{-p_1 z} A_{1mn} - d_7 p_1^3 e^{-p_1(z-z_1)} B_{1mn} - \right. \\ &\quad - d_8 p_2^3 e^{-p_2 z} A_{2mn} - d_8 p_2^3 e^{-p_2(z-z_1)} B_{2mn} - \\ &\quad \left. - d_9 p_3^3 e^{-p_3 z} A_{3mn} - d_9 p_3^3 e^{-p_3(z-z_1)} B_{3mn} \right] \sin(mx) \sin(ny), \\ \Gamma_2(S_{xz}^k, S_{zy}^k) &= \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \left[-c^2 p_1^3 e^{-p_1 z} A_{1mn} - c^2 p_1^3 e^{-p_1(z-z_1)} B_{1mn} - \right. \\ &\quad \left. - c^2 p_1^3 e^{-p_1(z-z_1)} B_{1mn} \right] \cos(mx) \cos(ny), \\ \varphi &= \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \left[-d_{10} p_1^2 e^{-p_1 z} A_{1mn} - d_{10} p_1^2 e^{-p_1(z-z_1)} B_{1mn} - \right. \\ &\quad - \bar{a} p_2^2 e^{-p_2 z} A_{2mn} - \bar{a} p_2^2 e^{-p_2(z-z_1)} B_{2mn} + \\ &\quad \left. + d_{11} p_3^2 e^{-p_3 z} A_{3mn} + d_{11} p_3^2 e^{-p_3(z-z_1)} B_{3mn} \right] \sin(mx) \sin(ny) \end{aligned} \quad (2.74)$$

$N_z, \Gamma_1(S_{xz}^k, S_{zy}^k), \Gamma_2(S_{xz}^k, S_{zy}^k), \varphi$ - თვის მიღებულ გამოახულებებს, როცა $z = z_0$ და $z = z_1$, გავუტოლებთ ამავე წახნაგზე მოცემულ ფუნქციებს გაშლილს ფურიეს ტრიგონომეტრიულ მწკრივებად. ამის შედეგად A_i, B_i მუდმივების მიმართ მივიღებთ ალგებრულ განტოლებათ სისტემას:

$$\begin{aligned}
 -c^2 p_1^3 A_{1mn} - c^2 p_1^3 e^{-p_1 z_1} B_{1mn} &= \overline{F}_{31mn}, \\
 -c^2 p_1^3 e^{-p_1 z_1} A_{1mn} - c^2 p_1^3 B_{1mn} &= \overline{F}_{32mn} \\
 d_7 p_1^2 A_{1mn} + d_7 p_1^2 e^{-p_1 z} B_{1mn} + d_8 p_2^2 A_{2mn} + d_8 p_2^2 e^{-p_1 z} B_{2mn} + \\
 + d_9 p_3^2 A_{3mn} + d_9 p_3^2 e^{-p_1 z} B_{3mn} &= \overline{F}_{11mn}, \\
 d_7 p_1^2 e^{-p_1 z_1} A_{1mn} + d_7 p_1^2 B_{1mn} + d_8 p_2^2 e^{-p_2 z_1} A_{2mn} + d_8 p_2^2 B_{2mn} + \\
 + d_9 p_3^2 e^{-p_3 z_1} A_{3mn} + d_9 p_3^2 B_{3mn} &= \overline{F}_{12mn},
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

$$\begin{aligned}
 -d_7 p_1^3 A_{1mn} - d_7 p_1^3 e^{-p_1 z_1} B_{1mn} - d_8 p_2^3 A_{2mn} - d_8 p_2^3 e^{-p_2 z_1} B_{2mn} - \\
 -d_9 p_3^3 A_{3mn} - d_9 p_3^3 e^{-p_3 z_1} B_{3mn} &= \overline{F}_{21mn} \\
 -d_7 p_1^3 e^{-p_1 z_1} A_{1mn} - d_7 p_1^3 B_{1mn} - d_8 p_2^3 e^{-p_2 z_1} A_{2mn} - d_8 p_2^3 B_{2mn} - \\
 -d_9 p_3^3 e^{-p_3 z_1} A_{3mn} - d_9 p_3^3 B_{3mn} &= \overline{F}_{22mn} \\
 -d_{10} p_1^2 A_{1mn} - d_{10} p_1^2 e^{-p_1 z_1} B_{1mn} - \overline{a} p_2^2 A_{2mn} - \overline{a} p_2^2 e^{-p_2 z_1} B_{2mn} + \\
 + d_{11} p_3^2 A_{3mn} + d_{11} p_3^2 e^{-p_3 z_1} B_{3mn} &= \overline{F}_{41mn} \\
 -d_{10} p_1^2 e^{-p_1 z_1} A_{1mn} - d_{10} p_1^2 B_{1mn} - \overline{a} p_2^2 e^{-p_2 z_1} A_{2mn} - \overline{a} p_2^2 B_{2mn} + \\
 + d_{11} p_3^2 e^{-p_3 z_1} A_{3mn} + d_{11} p_3^2 B_{3mn} &= \overline{F}_{42mn}
 \end{aligned} \tag{2.75'}$$

(2.74) -დან გვექნება

$$\begin{aligned}
 -c^2 p_1^3 A_{1mn} - c^2 p_1^3 e^{-p_1 z_1} B_{1mn} &= \overline{F}_{31mn}, \\
 -c^2 p_1^3 e^{-p_1 z_1} A_{1mn} - c^2 p_1^3 B_{1mn} &= \overline{F}_{32mn} \\
 A_{1mn} &= \frac{c^2 p_1^3 \overline{F}_{31mn} - c^2 p_1^3 e^{-p_1 z_1} \overline{F}_{32mn}}{c^4 p_1^6 (1 - e^{-2 p_1 z_1})}, \\
 B_{1mn} &= \frac{c^2 p_1^3 \overline{F}_{32mn} - c^2 p_1^3 e^{-p_1 z_1} \overline{F}_{31mn}}{c^4 p_1^6 (1 - e^{-2 p_1 z_1})},
 \end{aligned}$$

ხოლო $A_{2mn}, B_{2mn}, A_{3mn}, B_{3mn}$ მუდმივებისათვის მივიღებთ უსასრულო ალგებრულ განტოლებათა სისტემას $\Lambda_i (i = 1, 2, 3, \dots)$ ბლოკურ-დიაგონალური მატრიცით. $A_{1mn}, B_{1mn}, A_{2mn}, B_{2mn}, A_{3mn}, B_{3mn}$ მუდმივების

განსაზღვრის შემდეგ, შესაბამისი ფორმულების გამოყენებით ფილის ნებისმიერ წერტილიში შეიძლება ვიპოვოთ გადაადგილების ვექტორისა და ძაბვის ტენზორის კომპონენტების მნიშვნელობები.

ანალოგიურად აიგება ამოხსნა ნებისმიერი სხვა სასაზღვრო ამოცანისთვის.

მაგალითი. პიეზოელემენტი წარმოადგენს ZnO ან CdS ან $LiTC-19$ ან $LiTBC-3$ პიეზოკერამიკული მასალისაგან დამზადებულ ფილას. ფილის ზედა წახნაგი თავისუფალია გარე დატვირთვისაგან. იმავე წახნაგზე დაკრულია ელექტროდი, რომელთანაც მიყვანილია პოტენციალი (ნახ.4.)

ფილას დეკარტის მართკუთხა x, y, z საკოორდინატო სისტემაში უკავიაა $\Omega = \{0 < x < x_1; 0 < y < y_1; 0 < z < z_1\}$ არე, $\bar{\Omega} = \{0 \leq x \leq x_1; 0 \leq y \leq y_1; 0 \leq z \leq z_1\}$. (2.69),

(2.70) ფორმულების გთვალისწინებით, ქვემოთ მოგვყავს N_x და N_y ნორმალური ძაბვებისათვის რიცხვითი მნიშვნელობები (მექანიკური ძაბვების ეს მნიშვნელობები, რომლებიც მცირედ განსხვავდებიან ძაბვების მაქსიმალური მნიშვნელობებისაგან შესაბამის წერტილებში, მაინც გვიქმნის წარმოდგენას იმის შესახებ, თუ როგორ არიან ძაბვები განაწილებული პიეზოელემენტში).

ამოცანის ამოსახსნელად შედგენილი იქნა შემდეგი ბლოკ-სქემა (ბლოკ-სქემა1.)

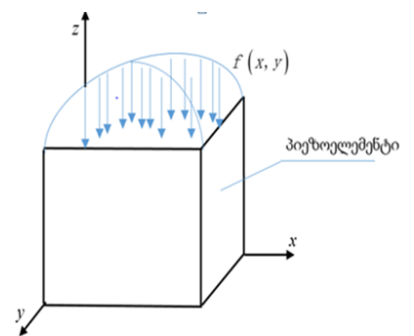
1. კვადრტული ფილის გვერდი-100მმ, ფილის სისქე - 50მმ. ამ ფილისათვის ფიზიკური მუდმივების რიცხვითი მნიშვნელობებია (პიეზოკერმიკა ZnO ტიპის):

$$c_1 = 20,97 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, \quad c_2 = 20,97 \cdot 10^{10} \text{ Pa},$$

$$c_3 = 10,51 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, \quad c_4 = 4,97 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, \quad c_5 = 4,43 \cdot 10^{10} \text{ Pa},$$

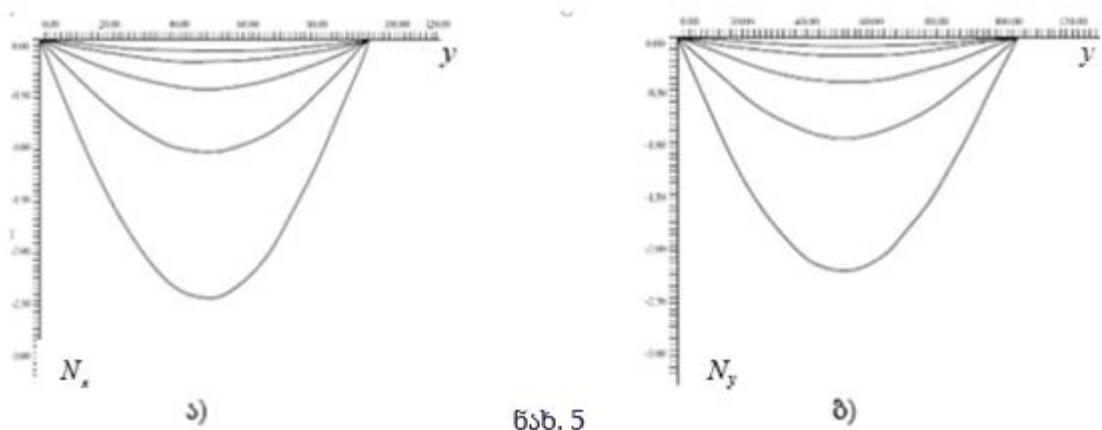
$$e_1 = -0,61 \text{ km/m}^2, \quad e_2 = 1,14 \text{ km/m}^2, \quad e_3 = 0,59 \text{ km/m}^2,$$

$$\epsilon_1 = 7,38 \cdot 10^{-11} \text{ F/m}, \quad \epsilon_2 = 7,83 \cdot 10^{-11} \text{ F/m}.$$



ნახ.4

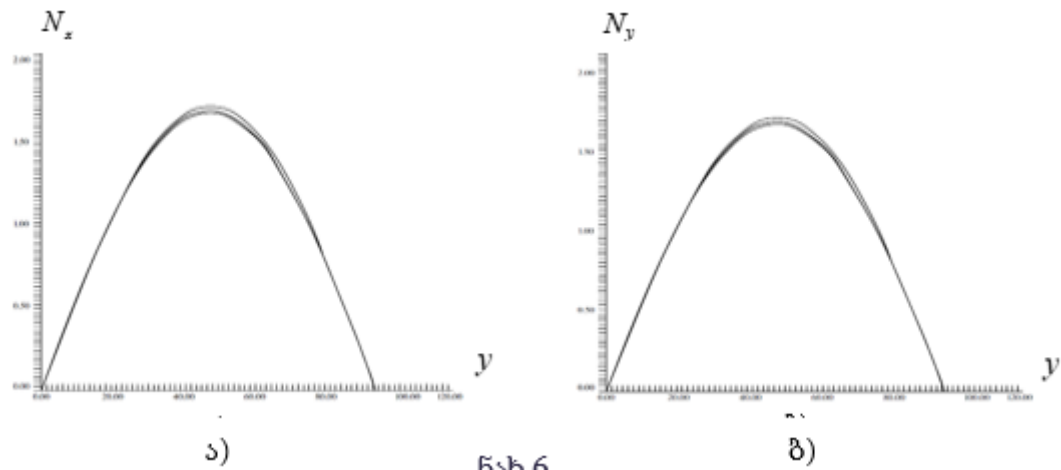
როცა $x = 50$ მმ, $y = 5, 10, \dots, 100$ მმ, $z = 5, 10, 15, 20, 15$ მმ შესაბამისი გრაფიკები N_x და N_y მოყვანილია ნახ.5 -ზე



ნახ. 5

2. კვადრატული ფილის გვერდი-100მმ, ფილის სისქე-50მმ. ამ ფილისათვის ფიზიკური მუდმივების რიცხვითი მნიშვნელობებია (პიეზო-კერმიკა Cds ტიპის): $c_1 = 8,56 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$, $c_2 = 9,36 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$, $c_3 = 4,62 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$, $c_4 = 1,49 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$, $c_5 = 1,62 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$, $e_1 = -0,24 \text{ km/m}^2$, $e_2 = 0,44 \text{ km/m}^2$, $e_3 = -0,21 \text{ km/m}^2$, $\Theta_1 = 7,99 \cdot 10^{-11} \text{ F/m}$, $\Theta_2 = 8,44 \cdot 10^{-11} \text{ F/m}$.

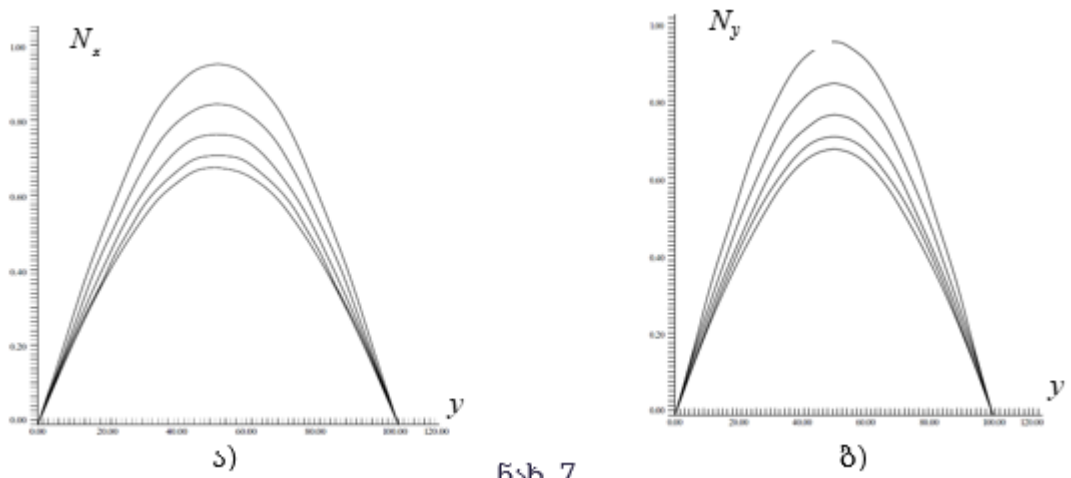
როცა $x = 50 \text{ მმ}$, $y = 5, 10, \dots, 100 \text{ მმ}$, $z = 5, 10, 15, 20, 15 \text{ მმ}$ შესაბამისი გრაფიკები N_x და N_y მოყვანილია ნახ. 6-ზე



ნახ.6

3. კვადრატული ფილის გვერდი-100მმ, ფილის სისქე-50მმ. ამ ფილისათვის ფიზიკური მუდმივების რიცხვითი მნიშვნელობებია (პიეზოკერმიკა LiTC-19 ტიპის): $c_1 = 10,09 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$, $c_2 = 9,3 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$, $c_3 = 5,4 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$, $c_4 = 2,4 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$, $c_5 = 2,4 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$, $e_1 = -3,4 \text{ km/m}^2$, $e_2 = 15,1 \text{ km/m}^2$, $e_3 = 9,45 \text{ km/m}^2$, $\Theta_1 = 12,38 \cdot 10^{-9} \text{ F/m}$, $\Theta_2 = 15,3 \cdot 10^{-9} \text{ F/m}$.

როცა $x = 50$ მმ, $y = 5, 10, \dots, 100$ მმ, $z = 5, 10, 15, 20, 15$ მმ შესაბამისი გრაფიკები N_x და N_y მოყვანილია ნახ. 7-ზე.



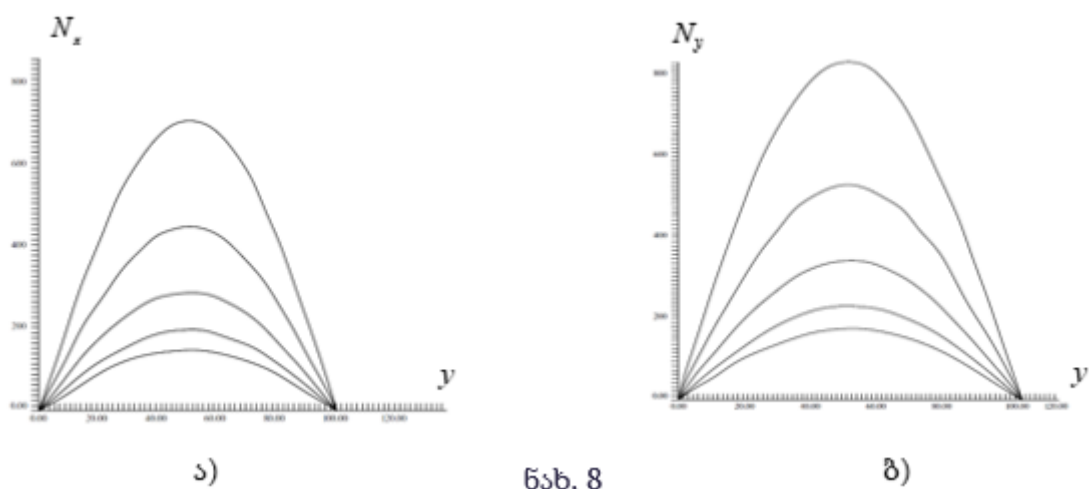
ნახ. 7

4. კვადრტული ფილის გვერდი-100მმ, ფილის სისქე-50მმ. ამ ფილისათვის ფიზიკური მუდმივების რიცხვითი მნიშვნელობებია (პიეზოკერმიკა ЦТБС-19 ტიპის): $c_1 = 15,1 \cdot 10^{10}$ Pa, $c_2 = 13,6 \cdot 10^{10}$ Pa, $c_3 = 8 \cdot 10^{10}$ Pa, $c_4 = 2,9 \cdot 10^{10}$ Pa,

$$c_5 = 3,6 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, e_1 = -7,9 \text{ km/m}^2, e_2 = 17,7 \text{ km/m}^2, e_3 = 15,4 \text{ km/m}^2, ,$$

$$\Theta_1 = 22,5 \cdot 10^{-9} \text{ F/m}, \Theta_2 = 18,47 \cdot 10^{-9} \text{ F/m} .$$

როცა $x = 50$ მმ, $y = 5, 10, \dots, 100$ მმ, $z = 5, 10, 15, 20, 15$ მმ შესაბამისი გრაფიკები N_x და N_y მოყვანილია ნახ. 8-ზე.



ნახ. 8

მიღებული გრაფიკების ანალიზი იძლევა საშუალებას გამოვიტანოთ შემდეგი დასკვნები:

1. ნებისმიერი პიეზოკერამიკისათვის ელემენტზე სიმეტრიული დატვირთვის დროს აღმოჩნდა რომ განაწილებული ნორმალური N_x და N_y ძაბვები ასევე სიმეტრიულია.

2. პირველი ტიპის პიეზოკერამიკისათვის ნორმალურ N_x და N_y ძაბვებს აქვს უარყოფითი მნიშვნელობა, მაგრამ სხვა ტიპისათვის კი მათი მნიშვნელობა დადებითია, რაც ნიშნავს იმას რომ პირველ შემთხვევაში პიეზოელემენტი იკუმშება x და y ღერძების მიმართულებით, სხვა შემთხვევებში ელემენტი გაჭიმულია.

3. ვინაიდან ნორმალური N_x და N_y ძაბვების განაწილება სხვადასხვა პიეზოკერამიკისათვის შეიძლება იყოს სხვადასხვა ნიშნების, მაშინ შეიძლება წარმოვიდგინოთ ისეთი ელემენტის არსებობა, რომელსაც აქვს ისეთი ფიზიკური მახასიათებლები, რომლის დროს ნორმალური ძაბვის მნიშვნელობა იქნება ნულის ტოლი.

4. შეიძლება ავაგოთ მრავალფენიანი ელემენტი, როდესაც ერთ-ერთი ფენა გაჭიმულია, ხოლო დანარჩენი ფენები იკუმშება.

მიღებული ამონახსნები შეიძლება გამოვიყენოთ პიეზოელექტრული მახასიათებლების განსაზღვრისათვის შემდეგი ალგორითმით:

შესვლა:

მოცემულია მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის პიეზოკერამიკული ელემენტი, რომლის გვერდითი წახნაგები დამაგრებულია სპეციალური სახით და მოცემულია ელემენტალური ტიპის გარე დატვირთვა.

I ეტაპი. პიეზოელემენტის რამდენიმე წერტილში იზომება გადაადგილების მნიშვნელობა (არა უმეტეს 10 წერტილისა).

II ეტაპი. გამოყენებულია მიღებული ამონახსნი სასაზღვრო სიბრტყეზე, ვლებულობთ ალგორითმულ გამოსახულებებს გადაადგილების კომპლექსური ვექტორისათვის (1.9), (1.12).

III ეტაპი. გავუტოლოთ რა რიცხვითი მნიშვნელობები გამოსახულებების განზომილებებს, რომელიც მიღებულია ფიზიკური მახასიათებლების შედარებით ანა-

ლიზურ ამოხსნასთან, ვლბულობთ ალგებრულ განტოლბათა სისტემას ათი უცნობით.

IV ეტაპი. მიღბული სისტემის ამოხსნით ვლბულობთ ფიზიკური მახასიათებლების მნიშვნელობებს.

ოპტიმალური წონის ამოცანა რომელიც ოპტიმალური სისქის იგივე ამოცანაა იხსნება ასევე შემოთავაზბული ამონახსნების დახმარბით.

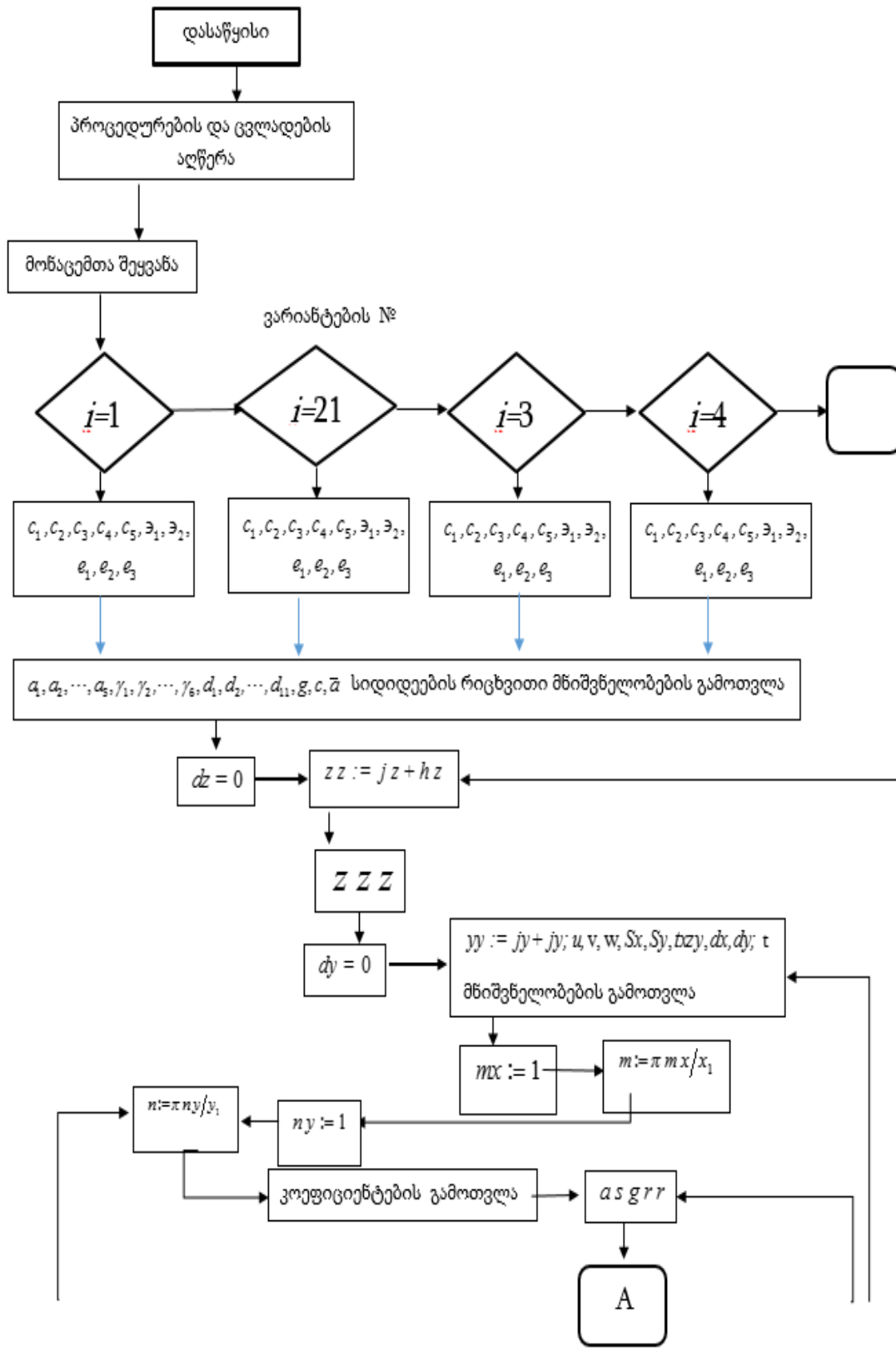
განვიხილოთ ისეთი ალგორითმი, რომლის შეყვანის დროს მოცემულია პიეზოელემენტის მახასიათებლებით, გარე დატვირთვბით, შიგა (დაძაბულ-დეფორმირბადი) პიეზელემენტის მდგომარეობით, ხოლო გამოსვლის დროს უნდა განისაზღვროს ოპტიმალური სისქე, ისე რომ არ შეიცვალოს ელემენტის სხვა ზომბები.

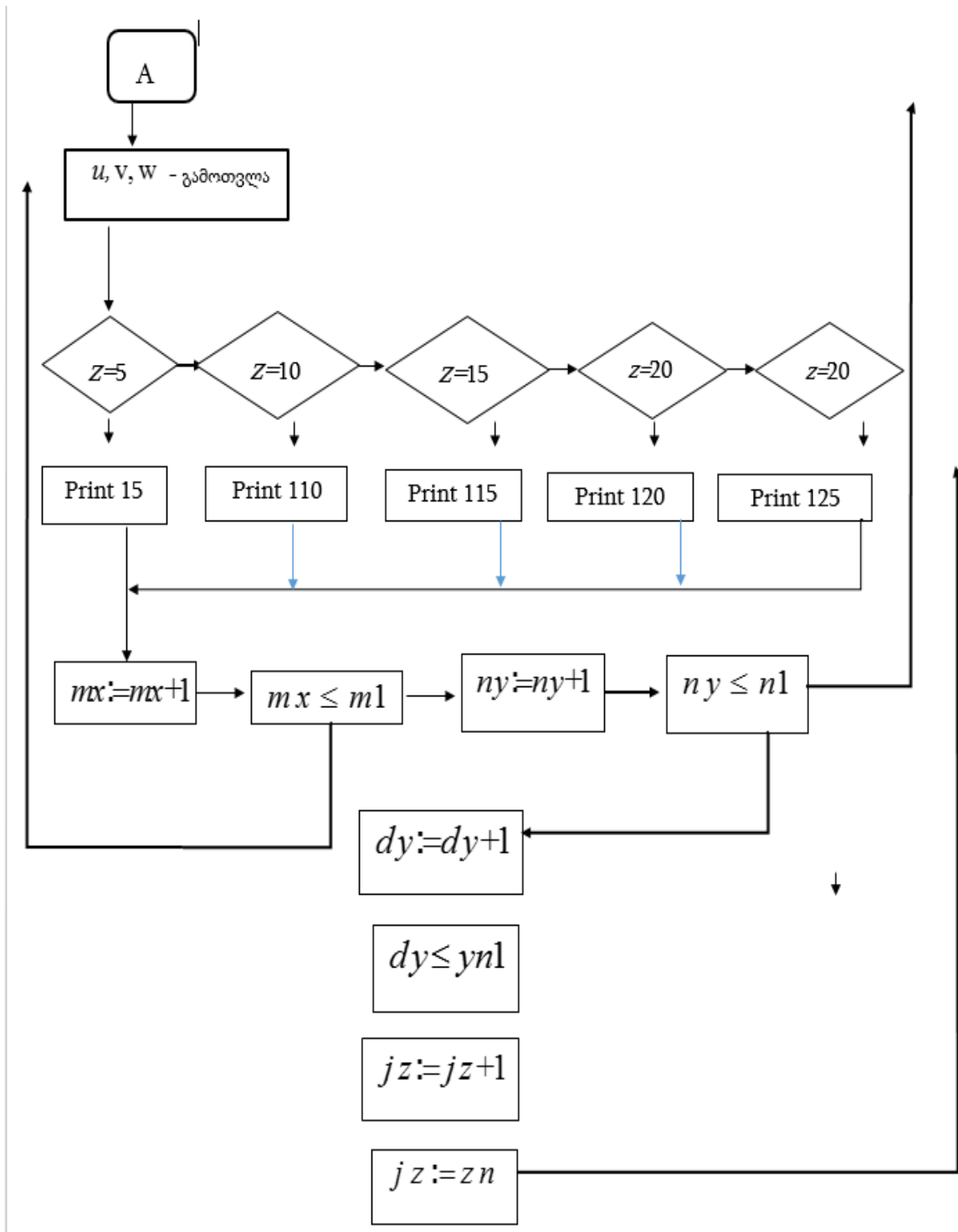
I ეტაპი. მოცემული მდგომარეობის საშუალებით დგინდება ანალიზური გამოსახულებების ზუსტი ამონახსნი.

II ეტაპი. ანალიზურ ამონახსნში უცნობ სიდიდბად გამოიყოფა ცვლადი, რომელიც ახასიათებს ელემენტის სისქეს და მოიცემა ფიზიკური მახასიათებლებით (1.12).

III ეტაპი. ამ ეტაპზე რიცხვითი ანალიზის დახმარბით ფიზიკური მახასიათებლების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის განისაზღვრბა პიეზოელემენტის მდგომარეობა, რომელიც იდენტურია ოპტიმალური სისქის მოცემული მდგომარეობით ((1.9),(1.12)).

მიღბული ამონახსნი შეიძლება გამოვიყენოთ შებრუნბული ამოცანის ამოხსნისას. განსაკუთრბით მარტივად იხსნება შებრუნბული ამოცანა თუ ამოცანის მიზანია u , v , w გადაადგილებბები. მოცემული u , v , w უწყვეტი ფუნქციებისათვის შებრუნბული ამოცანის ამოხსნა სრულდება შემდეგი ალგორითმით:





I ეტაპი. (1.1.3) და (1.1.4) ფორმულების საფუძველზე განისაზღვრება ძაბვის ტენზორის კოპონენტები, რომლებიც შეესაბამება მიღებულ ფუნქციებს.

II ეტაპი. (1.1.1) და (1.1.2) განტოლებებიდან, (1.1), (1.2), (1.3) სასაზღვრო პირობებიდან განისაზღვრება გარე ძალები, რომელთა მოქმედებითაც ხორციელდება მოცემული გადაადგილებები.

3. სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა გეგმაში მართკუთხა ფილისათვის.

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ ძირთად სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანებს მართკუთხა ფილისათვის.

ჩამოვყალიბოთ სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა გეგმაში მართკუთხა ფილისათვის: ვიპოვოთ $u^k, v^k, w^k \in C^3(\Omega_k) \cap C^{2,q}(\bar{\Omega}_k)$ ფუნქციები

$\bar{\Omega}_z = \{x_0 < x < x_1; y_0 < y < y_1\}$ არეში, რომლებიც აკმაყოფილებენ (2.11), (2.12) განტოლებებს, (2.16)-(2.20) სასაზღვრო პირობებს და (2.21)-(2.23) საკონტაქტო პირობებს, როცა $T=0$.

(2.11), (2.12) განტოლებებს ზოგადი ამონახსნი, როცა $\gamma_1 \neq \gamma_3, \gamma_1 \neq \gamma_6, \gamma_6 \neq \gamma_3$ აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} u^k = d_1^k \frac{\partial \psi^{0k}}{\partial x} + d_2^k \frac{\partial \Psi^{0k}}{\partial x} + d_3^k \frac{\partial \Phi^{0k}}{\partial x} + \frac{1}{c_5^k} \frac{\partial \Psi^k}{\partial y}, \\ v^k = d_1^k \frac{\partial \psi^{0k}}{\partial y} + d_2^k \frac{\partial \Psi^{0k}}{\partial y} + d_3^k \frac{\partial \Phi^{0k}}{\partial y} - \frac{1}{c_5^k} \frac{\partial \Psi^k}{\partial x}, \\ w^k = d_4^k \frac{\partial \psi^{0k}}{\partial y} - d_5^k \frac{\partial \Psi^{0k}}{\partial y} + d_6^k \frac{\partial \Phi^{0k}}{\partial y}, \\ \varphi^k = d_{10}^k \frac{\partial \psi^{0k}}{\partial y} - d_{11}^k \frac{\partial \Psi^{0k}}{\partial y} + d_{11}^k \frac{\partial \Phi^{0k}}{\partial y}. \end{cases} \quad (2.75)$$

ხოლო $N_z^k, S_{xz}^k, S_{zy}^k$

$$\begin{aligned} N_z^k &= d_7^k \frac{\partial^2 \psi^{k0}}{\partial z^2} + d_8^k \frac{\partial^3 \Psi^{k0}}{\partial z^3} + d_9^k \frac{\partial^3 \Phi^{k0}}{\partial z^3}, \\ \Gamma_1(S_{xz}^k, S_{zy}^k) &= -d_7^k \frac{\partial^2 \psi^{k0}}{\partial z^2} - d_8^k \frac{\partial^3 \Psi^{k0}}{\partial z^3} - d_9^k \frac{\partial^3 \Phi^{k0}}{\partial z^3}, \\ \Gamma_2(S_{xz}^k, S_{zy}^k) &= c^k \frac{\partial^3 \Psi^k}{\partial z^3}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

სადაც $d_1^k, d_2^k, \dots, d_{11}^k$ წინა პარაგრაფში განსაზღვრული მუმივებია.

ცვლადთა განცალების მეთოდისა და (2.16)-(2.20) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით გვექნება

$$\left\{ \begin{aligned} \Psi_1^k &= \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \left[A_{1mn}^k e^{-P_1 z_{k-1}} + B_{1mn}^k e^{-P_1(z-z_{k-1})} \right] \cos(mx) \cos(ny), \\ \Psi_2^k &= \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \left[A_{2mn}^k e^{-P_2 z_{k-1}} + B_{2mn}^k e^{P_2(z-z_{k-1})} \right] \sin(mx) \sin(ny), \\ \Psi_3^k &= \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \left[A_{3mn}^k e^{-P_3 z_{k-1}} + B_{3mn}^k e^{-P_3(z-z_{k-1})} \right] \sin(mx) \sin(ny), \\ \Phi^k &= \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \left[A_{4mn}^k e^{-P_4 z_{k-1}} + B_{4mn}^k e^{-P_4(z-z_{k-1})} \right] \sin(mx) \sin(ny), \end{aligned} \right.$$

თუ გამოვიყენებთ წინა პარაგრაფში სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის მეთოდს, A_{imn}^k, B_{imn}^k ($i=1,2,3,4$) მუდმივების განსაზღვრისათვის მივიღებთ უსარულო ალგებრულ განტოლებების სისტემას, კვაზიდიაგონალური მატრიცით, რომელიც შედგება $8l$ რიგის Λ_i ($i=1,2,3,\dots$) დიაგონალური ბლოკებისაგან.

Λ_i მატრიცის ძალიან დიდი სიდიდის გამო (მატრიცა დიდია უკვე, როცა $l > 1$), ამიტომ თავად მატრიცას, მის ზღვრულ გადასვლას და შესაბამის გარდაქმნებს არ მოვიყვანთ. რაც შეეხება l ნებისმიერ სასრული მნიშვნელობისთვის, შესაძლებელია ჩვენება, რომ $\Lambda_i \neq 0$.

მუდმივების განსაზღვრის შემდეგ ადვილი საჩვენებელია შემდეგი:

1. u^k, v^k, w^k, φ^k ფუნქციების და მათი ნებისმიერი რიგის წარმოებულების შესაბამისი მწკრივები $\bar{\Omega}$ არეში ექსოპონენციალურად იკრიბებიან;

2. F_{ik} ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტების გამოყენებით შეიძლება აიგოს u^k, v^k, w^k, φ^k ფუნქციების აბსოლუტირად და თანაბრად კრებადი რიცხვითი მაჟორანტული მწკრივი $\bar{\Omega}$ არეში.

ამგვარად, 1. და 2. წინადადებიდან გამომდინარეობს, რომ ეფექტურადაა მოძებნილი ერთადერთი, დასმული სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანის ამოხსნა.

ნებისმიერი სხვა სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანის ამოხსნა აიგება ანალოგიურად.

თავი 3. თერმოელექტროდრეკადობის მათემატიკური მოდელი

ცილინდრული ფილისათვის

3.1. ძირითადი განტოლებები, სასაზღვრო პირობები ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში

დეკარტისა და ცილინდრულ კოორდინატებს შორის არსებობს შემდეგი დამოკიდებულება:

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha, \quad z = z;$$

ლამეს კოეფიციენტებისთვის გვაქვს: $H_r = 1, H_\alpha = r, H_z = 1$, და წრიულ ცილინდრულ r, α, z კოორდინატთა სისტემაში ($0 \leq r \leq \infty, 0 \leq \alpha < \alpha_1, -\infty \leq z \leq \infty$) სქელ ფილას უკავია არე:

$$\Omega = \{0 \leq r_0 < r < r_1, 0 < \alpha < \alpha_1, 0 < z < z_1\}.$$

ფილა შემოსაზღვრულია ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემის საკოორდინატო ზედაპირებით. ამიტომ ასეთ სხეულებს შეიძლება ვუწოდოთ მრუდწირული საკოორდინატო პარალელებიპედი (ნახ. 9). იზოტროპიის სიბრტყედ მივიღოთ $z = const$ სიბრტყე.

ლამეს კოეფიციენტების გათვალისწინებით (1.2) და (1.3) ფორმულებიდან მივიღებთ თერმოელექტროდრეკადობის ძირითადი განტოლებების სისტემას r, α, z ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში [88], [89]:

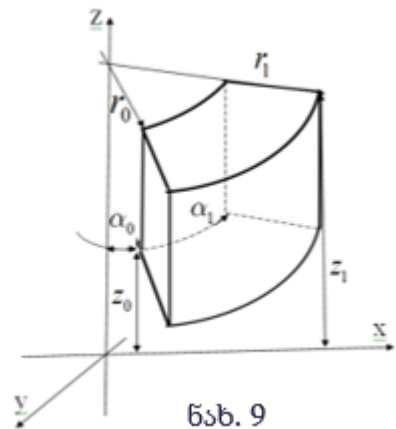
წონასწორობის განტოლებები:

$$a) \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{r\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial z} + \frac{N_r - N_\alpha}{r} = 0,$$

$$b) \frac{\partial S_{\alpha r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial S_{\alpha z}}{\partial z} + \frac{2S_{r\alpha}}{r} = 0,$$

$$c) \frac{\partial S_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{z\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{S_{rz}}{r} = 0,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r D_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0,$$



ნახ. 9

(3.1)

(3.2)

ფიზიკური განტოლებები

$$N_r = c_1 \varepsilon_{rr} + (c_1 - 2c_5) \varepsilon_{\alpha\alpha} + c_3 \varepsilon_{zz} - e_1 E_z - \beta_{10} T,$$

$$N_\alpha = (c_1 - 2c_5) \varepsilon_{rr} + c_1 \varepsilon_{\alpha\alpha} + c_3 \varepsilon_{zz} - e_1 E_z - \beta_{10} T,$$

$$N_z = c_3 (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\alpha\alpha}) + c_2 \varepsilon_{zz} - e_2 E_z - \beta_{20} T, \quad (3.3)$$

$$S_{\alpha z} = c_4 \varepsilon_{\alpha z} - e_3 E_\alpha, \quad (3.3)$$

$$S_{rz} = c_4 \varepsilon_{rz} - e_3 E_r,$$

$$S_{r\alpha} = c_3 \varepsilon_{r\alpha},$$

$$D_r = e_3 \varepsilon_{rz} + \vartheta_1 E_r,$$

$$D_\alpha = e_3 \varepsilon_{\alpha z} + \vartheta_1 E_\alpha,$$

$$D_z = e_1 (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\alpha\alpha}) + e_1 \varepsilon_{zz} + \vartheta_2 E_z.$$

(3.1) განტოლებები წარმოადგენენ დრეკადი წონასწორობის განტოლებებს, ხოლო (3.2) განტოლება კი ელექტროსტატიკის განტოლებაა. N_r, N_α, N_z - ძაბვის ნორმალური მდგენალებია, $S_{r\alpha}, S_{rz}, S_{\alpha z}$ - ძაბვის მხები მდგენელებია. D_r, D_α, D_z ელექტრული ინდუქციის \vec{D} ვექტორის მდგენელებია r, α, z საკოორდინატო ღერძების გასწვრივ.

$\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\alpha\alpha}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{r\alpha} = \varepsilon_{\alpha r}, \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{zr}, \varepsilon_{z\alpha} = \varepsilon_{\alpha z}$ - დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტებია; E_r, E_α, E_z - ელექტრული \vec{E} ველის კომპონენტებია და $\vec{E} = - \text{grad } \varphi$, სადაც φ ელექტრული პოტენციალია [88]. c_i ($i=1,2,3,4,5$) - დრეკადობის მუდმივებია; e_j , ($j=1,2,3$) - პიეზოელექტრული მუდმივებია; ϑ_1, ϑ_2 - დიელექტრული გამტარობის მუდმივებია; $\beta_{10} = [2(c_1 - c_5) * \beta_1 + c_3 \beta_3]$, $\beta_{20} = [2c_3 \beta_1 + c_2 \beta_2]$; β_1, β_2 - იზოტროპიის სიბრტყეში და z ღერძის გასწვრივ წრფივი სითბური გაფართოების კოეფიციენტებია [48]. ფილაში T ტემპერატურა აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \alpha^2} + \lambda_0 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (3.4)$$

სათანადო სასაზღვრო პირობებით. $\lambda_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$;

კოშის განტოლებებს ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში აქვს სახე [69]:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (3.5)$$

$$\varepsilon_{z\alpha} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \varepsilon_{r\alpha} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial \alpha},$$

სადაც u , v , w – გადაადგილების ვექტორის კომპონენტებია $or, o\alpha, oz$ საკოორდინატო ღერძების მხებების გასწვრივ. (3.3) და (3.5) ფორმულები შვეიტანოთ (3.1), (3.2) განტოლებებში და გავითვალისწინოთ, რომ

$$E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad E_\alpha = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha},$$

$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$, მივიღებთ ლამეს ანალოგიურ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned} & c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + c_1 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) + c_5 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + c_4 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (c_1 - c_5) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \alpha} - (c_3 + c_4) \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \\ & + c_3 \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} + (e_1 + e_3) \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} - \beta_{10} \frac{\partial T}{\partial r} = 0; \\ & (c_1 - c_5) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \alpha} + (c_1 + c_5) \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + c_5 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + c_5 \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial z} + c_1 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + c_4 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \\ & + (e_3 + c_4) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \alpha} + (e_1 + e_3) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \alpha} - \beta_{10} \frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0; \\ & (c_3 + c_4) \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + (c_3 + c_4) \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} + (c_3 + c_4) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \alpha} + c_4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right) + \\ & + c_2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + e_3 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha^2} \right) + e_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \beta_{10} \frac{\partial T}{\partial z} = 0; \\ & (e_1 + e_3) \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + e_3 (e_1 + e_3) \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} + (e_1 + e_3) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \alpha} + e_3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right) + \\ & + e_2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \varepsilon_1 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha^2} \right) - \varepsilon_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

(3.6) განტოლებათა სისტემას შეგვიძლია მივცეთ შემდეგი სახე [91],

$$\begin{aligned} a) & \frac{c_3}{c_1} \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} + \frac{c_1 c_2 - c_3}{c_1} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r S_{zr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{z\alpha}}{\partial \alpha} = \frac{c_3 e_1 - c_1 e_3}{c_1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \\ & + \frac{c_3 \beta_{20} - c_3 \beta_{10}}{c_1} \frac{\partial T}{\partial z}, \\ b) & r \frac{\partial K}{\partial r} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial (r S_{zr})}{\partial z} = 0, \\ c) & \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial K}{\partial \alpha} + \frac{\partial S_{z\alpha}}{\partial z} = 0, \\ d) & \frac{\partial (r S_{z\alpha})}{\partial r} - \frac{\partial S_{zr}}{\partial \alpha} - \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial (r B)}{\partial z} = 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

სადაც

$$\begin{aligned}
 a) K &= c_1 \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{u}{r} \right] + c_3 \frac{\partial w}{\partial z} + e_1 \frac{\partial \phi}{\partial z} - \beta_{10} T, \\
 b) B &= c_5 \left[\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right], \\
 c) S_{zr} &= c_4 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) + e_3 \frac{\partial \phi}{\partial r}, \\
 d) S_{z\alpha} &= c_4 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + e_3 \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

გავითვალისწინოთ, რომ

$$\begin{aligned}
 a) B_r &= c_4 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\
 b) B_\alpha &= c_4 \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right), \\
 c) B_z &= c_5 \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right).
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

გადაადგილების U ვექტორის როტორის კომპონენტებია და

$$\begin{aligned}
 a) S_{z\alpha} &= B_r + 2c_4 \frac{\partial v}{\partial z} + e_3 \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} = -B_r + 2c_4 \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + e_3 \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}, \\
 b) S_{z\rho} &= B_\alpha + 2c_4 \frac{\partial w}{\partial r} + e_3 \frac{\partial \phi}{\partial r} = -B_\alpha + 2c_4 \frac{\partial u}{\partial z} + e_3 \frac{\partial \phi}{\partial r}, \\
 c) S_{r\alpha} &= B_z - 2c_5 \frac{v}{r} + 2c_5 \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} = -B_z - 2c_5 \frac{u}{r} + 2c_5 \frac{\partial v}{\partial r},
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

მაშინ (3.6) სისტემიდან მარტივი გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
 a) & \frac{c_3 + 2c_4}{c_1} \frac{\partial \tilde{K}}{\partial z} + \frac{c_1 c_2 - (c_3 + 2c_4)^2}{c_1} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial (r B_\alpha)}{\partial r} + \\
 & + \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \alpha} = \frac{\beta_{20} c_1 - (c_3 + 2c_4)}{c_1} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{(c_3 + 2c_4) e_1 - c_1 e_2}{c_1} \times \\
 & \times \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - e_3 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha^2} \right),
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$b) r \frac{\partial \tilde{K}}{\partial r} - \frac{\partial B_z}{\partial \alpha} + r \frac{\partial B_\alpha}{\partial z} + e_3 r \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} = 0,$$

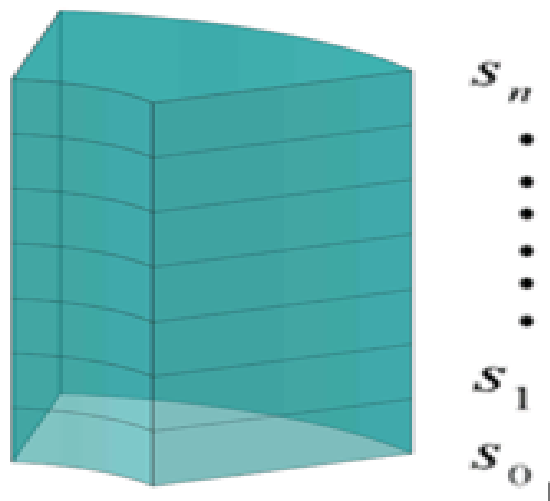
$$c) \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \alpha} - \frac{\partial B_r}{\partial z} + e_3 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha \partial z} = 0, \tag{3.12}$$

$$d) \frac{\partial (rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{c_4}{c_5} r \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0,$$

ჩამოვყალიბოთ სასაზღვრო და საკონტაქტო პირობები, რომლებიც განსაზღვრავენ ფილისათვის სასაზღვრო-სკონტაქტო ამოცანების კლასს.

განვიხილოთ ტრანსტროპული მრავალფენიანი ფილა $\Omega = \bigcup_{k=1}^l \Omega_k$, სადაც $\Omega_k = r_0 < r < r_1, \alpha_0 < \alpha < \alpha_1, z_0 < z < z_1$, როგორც წესი $\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^l \bar{\Omega}_k$, სადაც $\bar{\Omega}_k = r_0 \leq r \leq r_1, \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1, z_0 \leq z \leq z_1$. აღვნიშნოთ z_k საკოორდინატო სიბრტყის შესაბამის სიბრტყე $S = S_k$ -თი, ამასთან $k = 0$ ან $k = l$ (ნახ.10.)

T ტემპერატურას, φ ელექტრულ პოტენციალს, გადაადგილების \vec{U} ვექტორის, ელექტრული ინდუქციის \vec{D} ვექტორის, ელექტრული ველის \vec{E} ვექტორის და ძაბვის ტენზორის კომპონენტებს k -ურ ფენაში აღვნიშნავთ ზედა k ინდექსით.



ნახ. 10

S_0 ან S_l ზედაპირზე (ანუ საკოორდინატო z_0 ან z_l სიბრტყეზე)

$$\begin{aligned}
a) N_z^k &= F_{j_1}(r, \alpha), \quad S_{zr}^k = F_{j_2}(r, \alpha), \quad S_{z\alpha}^k = F_{j_3}(r, \alpha); \\
b) w^k &= f_{j_1}(r, \alpha), \quad u^k = f_{j_2}(r, \alpha), \quad v^k = f_{j_3}(r, \alpha); \\
c) w^k &= f_{j_1}(r, \alpha), \quad S_{zr}^k = F_{j_2}(r, \alpha), \quad S_{z\alpha}^k = F_{j_3}(r, \alpha); \\
d) N_z^k &= F_{j_1}(r, \alpha), \quad u^k = f_{j_2}(r, \alpha), \quad v^k = f_{j_3}(r, \alpha); \\
e) w^k &= f_{j_1}(r, \alpha), \quad S_{zr}^k = F_{j_2}(r, \alpha), \quad v^k = f_{j_3}(r, \alpha); \\
f) N_z^k &= F_{j_1}(r, \alpha), \quad S_{zr}^k = F_{j_2}(r, \alpha), \quad v^k = f_{j_3}(r, \alpha);
\end{aligned}
\tag{3.13}$$

და ა.შ.

ამასთან, როცა $z = z_0$ ან $z = z_1$ ტემპერატურული ველისათვის მოცემულია შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$\begin{aligned}
b) T^k &= F_{j_4}(r, \alpha), \text{ ან } b) \frac{\partial T^k}{\partial z} = F_{j_5}(r, \alpha), \text{ ან} \\
c) \frac{\partial T^k}{\partial z} + \Theta_j T^k &= F_{j_6}(r, \alpha),
\end{aligned}
\tag{3.14}$$

ხოლო ელექტრული ველისათვის

$$a) \varphi^k = f_{j_4}(r, \alpha), \text{ ან } b) D_z^k = f_{j_5}(r, \alpha).
\tag{3.15}$$

(3.13)- (3.15), ტოლობებში $k = 0$ ან l .

ყოველ ფენაში

როცა $r = r_0$ ან $r = r_1$

$$a) \frac{\partial T^k}{\partial r} = 0, \quad u^k = 0, \quad S_{rz}^k = 0, \quad B_z^k = 0, \quad D_r^k = 0, \text{ ან}
\tag{3.16}$$

$$b) T^k = 0, \quad \tilde{K}^k = 0, \quad v^k = 0, \quad w^k = 0, \quad \varphi^k = 0.$$

როცა $\alpha = \alpha_0$ ან $\alpha = \alpha_1$

$$a) \frac{\partial T^k}{\partial \alpha} = 0, \quad v^k = 0, \quad S_{zr}^k = 0, \quad S_{z\alpha}^k = 0, \quad D_r^k = 0;$$

$$b) T^k = 0, \quad N_\alpha^k = 0, \quad u^k = 0, \quad w^k = 0, \quad \varphi^k = 0.$$

(3.17)

k -ურ საკონტაქტო S_k ზედაპირზე სრულდება შემდეგი პირობები:

$$T^k - T^{k+1} = 0 \quad \frac{\partial T^k}{\partial z} - \frac{\partial T^{k+1}}{\partial z} = 0. \quad (3.18)$$

$$a) \quad N_z^k - N_z^{k+1} = 0, \quad S_{zr}^k - S_{zr}^{k+1} = 0, \quad S_{z\alpha}^k - S_{z\alpha}^{k+1} = 0, \\ u^k - u^{k+1} = 0, \quad v^k - v^{k+1} = 0; \quad w^k - w^{k+1} = 0; \quad (3.19)$$

ან

$$b) \quad w^k - w^{k+1} = 0, \quad N_z^k - N_z^{k+1} = 0, \quad S_{zr}^k = 0, \quad S_{zr}^{k+1} = 0, \\ S_{z\alpha}^k = 0, \quad S_{z\alpha}^{k+1} = 0; \quad (3.20)$$

ან

$$c) \quad N_z^k = 0, \quad N_z^{k+1} = 0, \quad S_{zr}^k - S_{zr}^{k+1} = 0, \quad S_{z\alpha}^k - S_{z\alpha}^{k+1} = 0, \\ u^k - u^{k+1} = 0, \quad v^k - v^{k+1} = 0; \quad (3.21)$$

და ა.შ.

ამასთან, (3.13) - (3.15) ფორმულებში მონაწილე $F_{ji}(r, \alpha)$, $f_{ji}(r, \alpha)$ ფუნქციები $\bar{\Omega}_z = \{r_0 < r < r_1; \varepsilon_0 < \alpha < \alpha_1\}$ არეში მოცემული ფუნქციებია. ისეთი, რომ Ω არის წიბოებზე სრულდება შეთანხმებულობის პირობები; რაც შეეხება

$$F_{ip} = F_{ip}(r, \alpha) \quad (p = \overline{1, 6}), \quad f_{iq} = f_{iq}(r, \alpha) \quad (q = \overline{1, 5}), \\ F_r = F_r(r, \alpha) \quad (r = \overline{1, 7}), \quad f_s = f_s(r, \alpha) \quad (s = \overline{1, 5})$$

ფუნქციებიდან მოვითხოვთ, რომ $F_{ip} \in C^{1,q}(S_k)$, $f_{iq} \in C^{2,q}(S_k)$, $C^{i,q}(S_k)$ - ფილის ზედაპირზე i -ჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციებია, ამასთან i -ური წარმოებული ეკუთვნის $C^{0,q}(S_k)$, $\frac{1}{2} < q < 1$ ჰელდერის კლასს. ეს პირობები უზრუნველყოფენ, რომ ფუნქციები შეგვიძლია წარმოვადგინოთ აბსოლუტური და თანაბრად კრებადი ფურიეს მწკრივების სახით. გარდა ამისა, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ ფილის წიბოებზე აკმაყოფილებენ შეთანხმებულობის პირობებს.

შემდგომისათვის ხელსაყრელია მივიღოთ ამოცანების ჩვენი კლასისათვის (3.13)-(3.15) სასაზღვრო და საკონტაქტო პირობების ეკვივალენტური პირობები.

სასაზღვრო პირობები:

როცა $r = r_0$ ან $r = r_1$

$$a) \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad u = 0, \quad S_{zr} = 0, \quad B = 0, \quad D_r = 0,$$

$$b) \quad T = 0, \quad K = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \varphi = 0. \quad (3.22)$$

როცა $\alpha = \alpha_0$ ან $\alpha = \alpha_1$

$$a) \quad T = 0, \quad N_\alpha = 0, \quad u = 0, \quad w = 0, \quad \varphi = 0 \quad (3.22')$$

$$b) \quad \frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0, \quad v = 0, \quad S_{z\alpha} = 0, \quad S_{zr} = 0, \quad D_\alpha = 0,$$

$$\begin{aligned} a) \quad \frac{\partial T}{\partial \alpha} &= F_{j1}(r, \alpha), & b) \quad T &= F_{j2}(r, \alpha), \\ c) \quad \frac{\partial T}{\partial y} + \Theta_j T &= F_{j3}(r, \alpha), \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$a) \quad \varphi = F_{j4}(r, \alpha), \quad b) \quad D_z = F_{j5}(r, \alpha). \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} a) \quad N_z^k &= F_{j6}(r, \alpha), \quad \Gamma_1(S_{zr}^k, S_{z\alpha}^k) = \tilde{F}_{j7}(r, \alpha), \\ \Gamma_2(S_{zr}^k, S_{z\alpha}^k) &= \tilde{F}_{j8}(r, \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad w^k &= f_{j3}(r, \alpha), \quad \Gamma_1(u^k, v^k) = \tilde{f}_{j1}(r, \alpha), \\ \Gamma_2(u^k, v^k) &= \tilde{f}_{j2}(r, \alpha), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad N_z^k &= F_{j6}(r, \alpha), \quad \Gamma_1(u^k, v^k) = \tilde{f}_{j1}(r, \alpha), \\ \Gamma_2(u^k, v^k) &= \tilde{f}_{j2}(r, \alpha), \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} d) \quad w^k &= f_{j3}(r, \alpha), \quad \Gamma_1(S_{zr}^k, S_{z\alpha}^k) = \tilde{F}_{j7}(r, \alpha), \\ \Gamma_2(S_{zr}^k, S_{z\alpha}^k) &= \tilde{F}_{j8}(r, \alpha) \end{aligned}$$

საკონტაქტო პირობები:

$$\begin{aligned} a) \quad N_z^k - N_z^{k+1} &= 0, \quad w^k - w^{k+1} = 0, \\ \Gamma_1(S_{zr}^k - S_{zr}^{k+1}, S_{z\alpha}^k - S_{z\alpha}^{k+1}) &= 0, \quad \Gamma_2(S_{zr}^k - S_{zr}^{k+1}, S_{z\alpha}^k - S_{z\alpha}^{k+1}) = 0, \\ \Gamma_1(u^k - u^{k+1}, v^k - v^{k+1}) &= 0, \quad \Gamma_2(u^k - u^{k+1}, v^k - v^{k+1}) = 0, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} b) \quad N_z^k - N_z^{k+1} &= 0, \quad w^k - w^{k+1} = 0, \\ \Gamma_1(S_{zr}^k, S_{z\alpha}^k) &= 0, \quad \Gamma_1(S_{zr}^{k+1}, S_{z\alpha}^{k+1}) = 0, \\ \Gamma_2(S_{zr}^k, S_{z\alpha}^k) &= 0, \quad \Gamma_2(S_{zr}^{k+1}, S_{z\alpha}^{k+1}) = 0, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} c) \quad N_z^k &= 0, \quad N_z^{k+1} = 0, \\ \Gamma_1(u^k - u^{k+1}, v^k - v^{k+1}) &= 0, \quad \Gamma_2(u^k - u^{k+1}, v^k - v^{k+1}) = 0, \\ \Gamma_1(S_{zr}^k - S_{zr}^{k+1}, S_{z\alpha}^k - S_{z\alpha}^{k+1}) &= 0, \quad \Gamma_2(S_{zr}^k - S_{zr}^{k+1}, S_{z\alpha}^k - S_{z\alpha}^{k+1}) = 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

აქ მიღებულია, რომ

$$\Gamma_1(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r\eta_1)}{\partial r} + \frac{\partial\eta_2}{\partial\alpha} \right], \Gamma_2(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r\eta_2)}{\partial r} - \frac{\partial\eta_1}{\partial\alpha} \right]$$

და $\eta_1 = S_{zr}$ ან $\eta_2 = S_{z\alpha}$ ან $\eta_1 = u$ ან $\eta_2 = v$;

$$F_{j1}(r, \alpha), \tilde{F}_{j2}(r, \alpha) \in C^{1,q}(S_k), f_{j1}(r, \alpha), \tilde{f}_{j2}(r, \alpha) \in C^{2,q}(S_k),$$

ახლა ვაჩვენოთ კლასიკური და მოდიფიცირებული სასაზღვრო და საკონტაქტო პირობების ეკვივალენტობა. კვლავაც დავუშვათ, რომ $\bar{U}(u, v, w) \in C_0^3(\bar{\Omega})$.

ჯერ განვიხილოთ (3.13a) პირობები. სიგლუვეზე ზემოთ მოთხოვნილის გამო შეგვიძლია r -ით და α - თი გავაწარმოთ $z = z_i$ სიბრტყეზე მოცემული ფუნქციები $S_{zr} = F_{j2}(r, \alpha)$ და $S_{z\alpha} = F_{j3}(r, \alpha)$; შევადგინოთ შემდეგი კომბინაციები:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial(r S_{zr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{z\alpha}}{\partial\alpha} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(r F_{j2}(r, \alpha))}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_{j3}(r, \alpha)}{\partial\alpha} = \tilde{F}_{j2}(r, \alpha), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r S_{z\alpha})}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial S_{zr}}{\partial\alpha} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(r F_{j2}(r, \alpha))}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial F_{j3}(r, \alpha)}{\partial\alpha} = \tilde{F}_{j3}(r, \alpha). \end{aligned} \quad (3.29)$$

მაშასადამე, (3.13a)-დან შეიძლება მივიღოთ (3.29) პირობები.

ვთქვათ, ახლა $z = z_i$ მოცემულია ასეთი კომბინაცია

$$\begin{aligned} N_z^k &= F_{j1}(r, \alpha), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r S_{zr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{z\alpha}}{\partial\alpha} &= F_{j2}(r, \alpha), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r S_{z\alpha})}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial S_{zr}}{\partial\alpha} &= F_{j3}(r, \alpha). \end{aligned} \quad (3.30)$$

განვიხილოთ (3.30) როგორც სისტემა განსაზღვრული ($r_0 < r < r_1, \alpha_0 < \alpha < \alpha_1$)

არეზე. თუ გავითვალისწინებთ შეთანხმებულობის პირობებს, გვექნება

$$\begin{aligned} a) \text{ როცა } r = r_i : S_{zr} &= 0, \frac{\partial(r S_{z\alpha})}{\partial r} = 0, \\ \text{როცა } \alpha = \alpha_i : S_{z\alpha} &= 0, \frac{\partial(r S_{zr})}{\partial r} = 0 \\ b) \text{ როცა } r = r_i : S_{z\alpha} &= 0, \frac{\partial(r S_{zr})}{\partial r} = 0 \\ \text{როცა } \alpha = \alpha_i : S_{zr} &= 0, \frac{\partial(r S_{z\alpha})}{\partial r} = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

a) შეესაბამება იმ ემთხვევას, როცა ფილის წახნაგებზე მოცემულია (3.16 a),(3.17 a) პირობები, ხოლო b) - შემთხვევას, როცა მოცემული (3.16 b),(3.17 b) პირობები.

თუ (3.31) აქვს ერთადერთი ამოხსნა, მაშინ ექვივალენტობა ნაჩვენები იქნება. ამისათვის კი აუცილებელია და საკმარისი, რომ (3.30)-(3.31) ამოცანის შესაბამის ერთგვაროვან ამოცანას ჰქონდეს მხოლოდ ტრივიალური ამოხსნა. ეს კი ტრივიალურად გამოდის ჰარმონიული ფუნქციებისათვის შერეული ამოცანის ერთადერთობიდან; ამრიგად, ექვივალენტობა დამტკიცებულია. ანალოგიურად მტკიცდება (3.25 b) და $z = z_i$ -ზე

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r v)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} = \bar{f}_{j2}(r, \alpha),$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r u)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} = \bar{f}_{j3}(r, \alpha).$$

პირობების ექვივალენტობა, როდესაც ფილის წახნაგებზე მოცემულია (3.16 b ,3.17 b) პირობები.

აღვნიშნოთ, რომ ვეძებთ თერმოელექტროდრეკადობის თეორიის დასმული სასაზღვრო ამოცანების რეგულარულ ამონახსნებს და რას ვგულისხმობთ რეგულარული ამონახსნიში.

ამოხსნას ეწოდება რეგულარული, თუ გადაადგილების \bar{U} ვექტორის u, v, w კომპონენტები, ელექტრული ინდუქციის \bar{D} ვექტორის D_r, D_α, D_z მდგენელები, ელექტრული ველის \bar{E} ვექტორის E_r, E_z, E_α კომპონენტები არიან სამჯერ უწყვეტად წარმოებადი ფილის შიგა არეში გვერდითი წახნაგების ჩათვლით. ფილის ზედა და ქვედა ფუძეებზე წარმოიდგინებინათ თავიანთი პირველი და მეორე რიგის წარმოებულებთან ერთად აბსოლუტურ და თანაბრად კრებადი ფურიეს ორმაგ მწკრივების სახით. ამ ფაქტს ასე აღვნიშნავთ: $(u, v, w) \in C_0^3(\Omega)$.

ახლა, ისევე როგორც დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის შემთხვევაში ჯერ შევისწავლოთ სითბური ამოცანა, ხოლო შემდეგ ავაგოთ თერმოელექტროდრეკადობის თეორიის განტოლებების ზოგადი ამონახსნები სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების გარკვეული კლასისათვის და სითბური ამოცანის ამოხსნა მონაწილეობს როგორც მოცემული სიდიდე.

ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში სითბოგამტარებლობის განტოლებას თერმულად ერთგვაროვანი გარემოსათვის, ე.ი. როდესაც λ_1 და λ_2 კოეფიციენტები მუდმივი სიდიდეებია, აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} + \lambda_0 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad (3.32)$$

სადაც $\lambda_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, ამასთან ერთად მოცემულია შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$\text{როცა } r = r_i : a) \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \text{ ან } b) T = 0; \quad (3.33)$$

$$\text{როცა } \alpha = \alpha_i : a) \frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0 \text{ ან } b) T = 0 \quad (3.34)$$

$$\text{როცა } z = z_i : a) \frac{\partial T}{\partial z} = F_{i1} \text{ ან } b) T = F_{i2} \quad (3.35)$$

$$c) \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \theta_i T = F_{i3} \quad T = 0,$$

$i = 0, 1$ და $z_0 = 0$.

T ფუნქცია, ცვლადთა განცალკევების მეთოდის გამოყენებით, $\Omega = r_0 < r < r_1, \alpha_0 < \alpha < \alpha_1, 0 < z < z_1$ არეში წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$T = t_0 + t_1 z + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (A_{Tmn} e^{-P_r z} + B_{Tmn} e^{-P_r(z-z_1)}) \Psi_{mn}(r, \alpha), \quad (3.36)$$

სადაც $t_0, t_1, P_r = \lambda_0^{-0.5} P(m, n) \geq 0, A_{Tmn}, B_{Tmn}$, ხოლო $\Psi_{mn}(r, \alpha)$ - შტურმ-ლიუვილის არატრივიალური ამონახსნია [64]:

$$\frac{\partial^2 \Psi_{mn}(r, \alpha)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_{mn}(r, \alpha)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi_{mn}(r, \alpha)}{\partial \alpha^2} + p^2 \Psi_{mn}(r, \alpha) = 0 \quad (3.37)$$

$$\text{როცა } r = r_i : a) \frac{\partial \Psi_{mn}(r, \alpha)}{\partial r} = 0 \text{ ან } b) \Psi_{mn}(r, \alpha) = 0; \quad (3.38)$$

$$\text{როცა } \alpha = \alpha_i : a) \frac{\partial \Psi_{mn}(r, \alpha)}{\partial \alpha} = 0 \text{ ან } b) \Psi_{mn}(r, \alpha) = 0. \quad (3.39)$$

(3.38) და (3.39) პირობებს (3.33) და (3.34) პირობებიდან მივიღებთ. შევნიშნოთ, რომ $\Psi_{mn}(r, \alpha)$ - ტრიგონომეტრიული ფუნქციის და ბესელის ფუნქციის ნამრაველია.

ცხადია, რომ შეიძლება განვიხილოთ ისეთი ამოცანა, როცა ტემპერატურული გარემო არაერთგვაროვანია, ან შესაძლებელია (3.32) განტოლების ამონახსნი სხვა სახით წარმოვადგინოთ, მაგრამ ამჟერად ამ შემთხვევებს აქ არ განვიხილავთ, ხოლო დაინტერესებულ მკითხველს მივუთითებთ ნაშრომს [63].

ახლა ფილის თერმოელექტროდრეკადობის განტოლებების განსახილავი სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების კლასისათვის ავაგოთ ზოგადი ამონახსნები. 3.7*b, c, d* -დან პირველს, მეორეს და მესამეს გავაწარმოებთ შესაბამისად r -ით, α -ით, z -ით და შევკრიბავთ, მივიღებთ

$$\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B}{\partial \alpha^2} + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = 0 \quad (3.40)$$

ანუ

$$\Delta_2 B + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = 0, \quad (3.41)$$

სადაც

$$\Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} .$$

წარმოვადგინოთ B შემდეგი სახით

$$B = \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2}, \quad (3.42)$$

სადაც ψ_0 აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\Delta_2 \psi_0 + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} = 0. \quad (3.43)$$

შევიტანოთ B გამოსახულება 3.7 -ის მეორე, მესამე და მეოთხე განტოლებაში, მივიღებთ

$$\begin{cases} r \frac{\partial K}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(S_{rz} - \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \alpha \partial z} \right) = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial K}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial z} \left(S_{\alpha z} + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r \partial z} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(S_{\alpha z} + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r \partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(S_{rz} - \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \alpha \partial z} \right) = 0. \end{cases} \quad (3.44)$$

(3.44) წარმოადგენს აუცილებელ და საკმარის პირობას, რათა არსებობდეს

$\psi_1(r, \alpha, z)$ ფუნქცია, რომლისთვისაც

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = S_{rz} - \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \alpha \partial z} = 0, \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} = S_{\alpha z} + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r \partial z} = 0, \\ K = \frac{\partial \psi_1}{\partial z}. \end{cases} \quad (3.45)$$

აქედან მივიღებთ

$$\begin{cases} S_{rz} = \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \alpha \partial z}, \\ S_{\alpha z} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} - \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r \partial z}, \\ K = \frac{\partial \psi_1}{\partial z}. \end{cases} \quad (3.46)$$

თუ ახლა (3.46) გამოსახულებას შევიტანთ (3.8)-ში, მივიღებთ:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \alpha \partial z} = c_4 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) + e_3 \frac{\partial \phi}{\partial r}, \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} - \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r \partial z} = c_4 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + e_3 \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}, \\ c_5 \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) = \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2}. \end{cases} \quad (3.47)$$

აქედან მარტივი გარდაქმნების და სრული დიფერენციალის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობის გამოყენებით, რომ არსებობს $\psi_2(r, \alpha, z)$ ფუნქცია და გადაადგილების ვექტორის მდგენელებს $\psi_0(r, \alpha, z), \psi_1(r, \alpha, z), \psi_2(r, \alpha, z)$ ფუნქციების საშუალებით ექნება სახე

$$\begin{cases} u = \frac{\partial}{\partial r} \left(\psi_2 + \frac{1}{2c_4} \psi_1 \right) + \frac{1}{c_5} \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha}, \\ v = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\psi_2 + \frac{1}{2c_4} \psi_1 \right) - \frac{1}{c_5} \frac{\partial \psi_0}{\partial r}, \\ w = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\psi_2 + \frac{1}{2c_4} \psi_1 \right) + \frac{1}{c_4} \frac{\partial \psi_2}{\partial z} - \frac{e_3}{c_4} \phi. \end{cases} \quad (3.48)$$

$\psi_0(r, \alpha, z)$, $\psi_1(r, \alpha, z)$, $\psi_2(r, \alpha, z)$ და φ ფუნქციები აკმაყოფილებენ შემდეგ

განტოლებებს:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 a) \Delta_2 \psi_1 + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = 0 \\
 b) \Delta_2 \psi_2 + \frac{c_1 c_2 - c_3^2 - 2c_3 c_4}{2c_1 c_4} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} + \frac{c_1 c_2 - c_3^2}{c_1} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} - \\
 \quad - \frac{c_1 c_2 - c_3^2}{c_1 c_4} e_3 + \frac{e_1 c_3 - c_1 e_2}{c_1} \frac{c_4}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{c_1 \beta_{20} - c_3 \beta_{10}}{c_1} T = 0, \\
 c) 2c_4 \Delta_2 \psi_3 + \Delta_2 \psi_2 + \frac{c_3 + 2c_4}{c_1} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} - \frac{2c_3 c_4}{c_1} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} - \\
 \quad - \frac{2c_3 e_3 - c_4 e_1}{c_1} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{2c_4 \beta_{10}}{c_1} T = 0, \\
 e) \Delta_2 \varphi + \frac{e_2 e_3 + e_1 c_4}{e_1 c_4 + e_3^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{e_1 c_4}{e_1 c_4 + e_3^2} \Delta_2 \psi_3 - \frac{e_2 c_4}{e_1 c_4 + e_3^2} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} + \right. \\
 \quad \left. + \frac{e_1 + 2e_3}{e_1 c_4 + e_3^2} \Delta_2 \psi_2 + \frac{e_2}{2(e_1 c_4 + e_3^2)} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} \right].
 \end{array} \right. \quad (3.49)$$

ფილის ფიზიკური თვისებების გათვალისწინებით ამ სისტემამ შეიძლება იმდენად ხელსაყრელი სახე მიიღოს, რომ შესაძლებელი გახდეს მისი ზუსტი (ანალიზური) ამოხსნა.

განვიხილოთ სუსტად ტრანსტროპული ერთგვაროვანი ფილა, კერძოდ დავუშვათ, რომ

$$c_1 c_2 - c_3^2 + 2c_4^2 = 0, \quad c_3 + 2c_4 \beta_{10} - c_1 \beta_{20} = 0, \quad c_3 + 2c_4 e_1 - c_1 e_2 = 0. \quad (3.50)$$

აღვნიშნოთ $\xi = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}$, $\eta = \frac{c_4}{c_5}$, მაშინ (3.50) ფორმულებისათვის გვექნება

$$c_3 + 2c_4 = \xi c_1, \quad c_3 + 2c_4, \quad \beta_{20} = \beta_{10} \xi, \quad e_2 = \xi e_1. \quad (3.51)$$

(3.51) ფორმულების გათვალისწინებით, (3.12) განტოლებათა სისტემა შეგვიძლია გადავწეროთ ასეთი სახით

$$a) \xi c_1 \frac{\partial \tilde{K}}{\partial z} - \frac{\partial (r B_\alpha)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \alpha} = -e_3 \Delta_2 \phi,$$

$$b) r \frac{\partial \tilde{K}}{\partial r} - \frac{\partial B_z}{\partial \alpha} + r \frac{\partial B_\alpha}{\partial z} + e_3 r \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} = 0, \quad (3.52)$$

$$c) \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \alpha} - \frac{\partial B_r}{\partial z} + e_3 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha \partial z} = 0,$$

$$d) \frac{\partial (rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{c_4}{c_5} r \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

გავაწარმოთ 3.53 b, c, d -დან პირველი, მეორე და მესამე შესაბამისად r -ით, α -ით, z -ით და შევკრიბოთ, მივიღებთ

$$\Delta_2 B + \eta \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = 0, \quad (3.53)$$

სადაც

$$\Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}.$$

მივიღოთ, რომ

$$B = \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2}, \quad (3.54)$$

სადაც

$$\Delta_2 \Phi_0 + \eta \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} = 0,$$

მაშინ (3.52) სისტემა გადავწეროთ ასეთი სახით

$$\frac{\partial \tilde{K}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(B_\alpha - \eta \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \alpha \partial z} + e_3 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial \tilde{K}}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial z} \left(rB_r - \eta r \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r \partial z} - e_3 \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right) = 0, \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(rB_r - \eta r \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r \partial z} - e_3 \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(B_\alpha - \eta \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \alpha \partial z} + e_3 \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right) = 0.$$

(3.55) -დან გვექნება

$$\tilde{K} = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2},$$

$$rB_r = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \alpha \partial z} + \eta r \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r \partial z} + e_3 \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}, \quad (3.56)$$

$$B_\alpha = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r \partial z} + \eta \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \alpha \partial z} - e_3 \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}.$$

(3.54) და (3.56) ფორმულები შევიტანოთ (3.9)-ში და (3.10)-ში, მივიღებთ

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} + \frac{1}{c_3} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha}, \\ v &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} - \frac{1}{c_5} \frac{\partial \Phi_0}{\partial r}, \\ w &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \frac{1}{c_4} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \frac{e_3}{c_4} \varphi. \end{aligned} \quad (3.57)$$

$\Phi_0(r, \alpha, z), \Phi_1(r, \alpha, z), \Phi_2(r, \alpha, z)$ და φ ფუნქციები აკმაყოფილებენ შემდეგ განტოლებებს:

$$\begin{aligned} \Delta_2 \Phi_0 + \eta \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\Delta_2 \Phi_1 + \eta \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} \right) + 2e_3 \Delta_2 \varphi &= 0, \\ \Delta_2 \Phi_2 + \xi \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} + \frac{\xi c_1 - c_4}{c_1 c_4} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + \frac{e_2 c_1 + e_1 c_4}{c_4} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\beta}{c_1} T &= 0, \\ \left(\rho_1 - \frac{e_3^2}{c_4} \right) \Delta_2 \varphi + \left(\rho_2 - \frac{e_2}{c_4} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= \\ = \frac{\partial}{\partial z} \left[2e_3 + e_1 \Delta_2 \Phi_2 + e_2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} + \frac{e_3}{c_4} \Delta_2 \Phi_1 + \frac{e_2}{c_4} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} \right]. \end{aligned}$$

დაბოლოს, (3.48)-ის გათვალისწინებით ამოვწეროთ ფორმულები, რომლებსაც შემდეგ გამოვიყენებთ

$$\left\{ \begin{aligned} N_z &= c_3 \Delta_2 \psi_2 - c_3 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} + \frac{c_3}{2c_4} \Delta_2 \psi_1 + \frac{c_2}{2c_4} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} + \frac{e_2 c_4 - e_3 c_2}{c_4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \\ \Gamma_1 S_{zr}, S_{z\alpha} &= -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -c_3 \Delta_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial z} + c_3 \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial z^3} - \\ &\quad - \frac{c_3}{2c_4} \Delta_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \frac{c_2}{2c_4} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial z^3} - \frac{e_2 c_4 - e_3 c_2}{c_4} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3}, \\ \Gamma_2 S_{zr}, S_{z\alpha} &= \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial B}{\partial z} = c^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2}, \end{aligned} \right.$$

სადაც $c = \frac{c_4}{c_5}$.

შენიშვნა 1. ამ და წინა თავში ამოწერილი იყო არაერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობები, როცა $z = z_i$ და $x = x_i$ (ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში, როცა $r = r_i$), ხოლო ფილის დარჩენილ ნაწილზე სიმეტრიის ან ანტისიმეტრიის პირობები. ცხადია, რომ დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში არსებითი არაა თუ

როგორ დაიტვირთება ფილა, რადგან სამივე კოორდინატი წრფივია და ურთიერთ შენაცვლებადია, რასაც ადგილი არა აქვს ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემისათვის. ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ მხოლოდ უნიფიცირებისათვის მოვიყვანეთ ორივე სახის ზოგადი ამონახსნები.

ამგვარად, მიღებულია სამგანზომილებიანი პიეზოკერამიკული ელემენტის ბაზური მათემატიკური მოდელი ფილისათვის, რომელიც გვამლევს შესაძლებლობას ავაგოთ ზოგადი ამონახსნები სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების ფართო კლასისთვის. მიღებული, რომ მათემატიკური მოდელის საძიებელი ფუნქციები გამოვსახოთ დამხმარე ფუნქციებით, რომლებიც აკმაყოფილებენ შესაბამის განტოლებებს.

3.2. ელექტროდრეკადობის თეორიის სასაზღვრო-საკონტაქტო

ამოცანა ცილინდრული ფილისათვის

ამ პარაგრაფში ამოხსნილია ზოგიერთი სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა ტრანსტროპული ფილისათვის (3.22),(3.22'), (3.24),(3.25) სასაზღვრო პირობებით და (3.26)-(3.28) საკონტაქტო პირობებით. ზოგადობის შეუზღუდავად და მხოლოდ სიმარტივისთვის უგულებელყოფილია ტემპერატურული ველის ზემოქმედება.

ამ სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების ამოხსნის მეთოდი შესაძლებელია გამოყენებული იყოს სხვა ამოცანების ამოსახსნელად: ტრანსტროპული მრავალფენიანი ცილინდრული ფილისათვის, ერთი და მრავალფენიანი ტრანსტროპული სექტორული ფილისათვის, ერთი და მრავალფენიანი ტრანსტროპული ფენისათვის და ა.შ.

ახლა ავაგოთ (3.22), (3.22'), (3.24), (3.25), (3.26)-(3.28) სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანის რეგულარული ამოხსნა. ამ მიზნით გამოვიყენოთ (2.44) ზოგადი ამონახსნი. შევარჩიოთ ფუნქციები ისე რომ დაკმაყოფილდეს, მაგალითად, (3.22a), (3.22'b) სასაზღვრო პირობები. ამისთვის $\psi_0^k, \psi_1^k, \psi_2^k, \varphi^k$ ფუნქციები წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\left\{ \begin{aligned}
\psi_0^k &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_0^k e^{0-\mu_{mn}z} + B_0^k e^{0-\mu_{mn}(z_{k-1}-z)} \right] \cdot \left[\frac{d N_m^{\mu_{mn} r_0}}{dr} \times, \right. \\
&\times \left. J_m^{\mu_{mn} r} - \frac{d J_m^{\mu_{mn} r_0}}{dr} N_m^{\mu_{mn} r} \right] \cos m\alpha \\
\psi_1^k &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_1^k e^{1-\mu_{mn}z} + B_1^k e^{1-\mu_{mn}(z_{k-1}-z)} \right] \cdot \left[\frac{d N_m^{\mu_{mn} r_0}}{dr} \times, \right. \\
&\times \left. J_m^{\mu_{mn} r} - \frac{d J_m^{\mu_{mn} r_0}}{dr} N_m^{\mu_{mn} r} \right] \sin m\alpha, \\
\psi_2^k &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_2^k e^{2-\mu_{mn}z} + B_2^k e^{2-\mu_{mn}(z_{k-1}-z)} \right] \cdot \left[N_m^{\mu_{mn} r_0} \right] \times \\
&\times \left[J_m^{\mu_{mn} r} \right] \left[J_m^{\mu_{mn} r_0} \right] \left[N_m^{\mu_{mn} r} \right] \sin(m\alpha) \\
\varphi^k &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_3^k e^{3-\mu_{mn}z} + B_3^k e^{3-\mu_{mn}(z_{k-1}-z)} \right] \cdot \left[N_m^{\mu_{mn} r_0} \right] \times \\
&\times \left[J_m^{\mu_{mn} r} \right] \left[J_m^{\mu_{mn} r_0} \right] \left[N_m^{\mu_{mn} r} \right] \sin(m\alpha)
\end{aligned} \right.$$

სადაც $J_m^{\mu_{mn} r}$ და $N_m^{\mu_{mn} r}$ პირველი და მეორე რივის ზესელის ფუნქციებია [45].

$$m = \frac{\pi \bar{m}}{\alpha_1}, \bar{m} = 0, 1, 2, \dots; \mu_{mn} - n \text{ -ური ფესვია}$$

$$\frac{d N_m^{\mu_{mn} r_0}}{dr} \frac{d J_m^{\mu_{mn} r_1}}{dr} - \frac{d J_m^{\mu_{mn} r_0}}{dr} \frac{d N_m^{\mu_{mn} r_1}}{dr} = 0$$

განტოლების, ხოლო $\mu_{mn}^i - n$ -ური ფესვია

$$N_m^{\mu_{mn} r_0} J_m^{\mu_{mn} r_1} - J_m^{\mu_{mn} r_0} N_m^{\mu_{mn} r_1} = 0$$

$$\text{განტოლების; } \mu_{mn}^0 = \left(\frac{c_4}{c_5} \right)^{-0,5} \mu_{mn}; \mu_{mn}^i = d_i^{-0,5} \mu_{mn}; \mu_{mn}^3 = \gamma_1^{-0,5} \mu_{mn}.$$

გადადგილების ვექტორის კომპონენტებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned}
u^k &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\bar{d}_1 \psi_1^k + \bar{d}_2 \psi_2^k + \bar{d}_3 \Phi^0 \right) + \frac{1}{c_5} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0^k}{\partial \alpha} = \\
&= \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \left[\left(\bar{d}_1 e^{-\mu_{mn}^i z} A_{1mn}^k + \bar{d}_1 e^{-\mu_{mn}^1 (z_{k-1}-z)} B_{1mn}^k + \bar{d}_2 e^{-\mu_{mn}^2 z} A_{2mn}^k + \bar{d}_2 e^{-\mu_{mn}^2 (z_{k-1}-z)} B_{2mn}^k + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \bar{d}_3 e^{-\mu_{mn}^3 z} A_{3mn}^k + \bar{d}_3 e^{-\mu_{mn}^3 (z_{k-1}-z)} B_{3mn}^k \right) \left(N_m(\mu_{mn} r_0) \frac{d J_m(\mu_{mn} r)}{dr} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - J_m(\mu_{mn} r_0) \frac{d N_m(\mu_{mn} r)}{dr} \right) \right] - \frac{m}{c_5} \frac{1}{r} \left(e^{-\mu_{mn}^0 z} A_{0mn}^k + e^{-\mu_{mn}^0 (z_{k-1}-z)} B_{0mn}^k \right) \times \\
&\times \left[\left(\frac{d N_m(\mu_{mn} r_0)}{dr} J_m(\mu_{mn} r) - \frac{d J_m(\mu_{mn} r_0)}{dr} N_m(\mu_{mn} r) \right) \right] \sin(m\alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v^k &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\bar{d}_1 \psi_1^k + \bar{d}_2 \psi_2^k + \bar{d}_3 \Phi^0) - \frac{1}{c_5} \frac{\partial \psi_0^k}{\partial \alpha} = \\
&= \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \left[\frac{m}{r} (\bar{d}_1 e^{-\mu_{mn}^j z} A_{1mn}^k + \bar{d}_1 e^{-\mu_{mn}^1 (z_{k-1}-z)} B_{1mn}^k + \bar{d}_2 e^{-\mu_{mn}^2 z} A_{2mn}^k + \bar{d}_2 e^{-\mu_{mn}^2 (z_{k-1}-z)} B_{2mn}^k + \right. \\
&\quad \left. + \bar{d}_3 e^{-\mu_{mn}^3 z} A_{31mn}^k + \bar{d}_3 e^{-\mu_{mn}^3 (z_{k-1}-z)} B_{3mn}^k) (N_m(\mu_{mn} r_0) J_m(\mu_{mn} r) - \right. \\
&\quad \left. - J_m(\mu_{mn} r_0) N_m(\mu_{mn} r)) - \frac{1}{c_5} (e^{-\mu_{mn}^0 z} A_{0mn}^k + e^{-\mu_{mn}^0 (z_{k-1}-z)} B_{0mn}^k) \right] \times \\
&\quad \times \left(\frac{d N_m(\mu_{mn} r_0)}{dr} \frac{d J_m(\mu_{mn} r)}{dr} - \frac{d J_m(\mu_{mn} r_0)}{dr} \frac{d N_m(\mu_{mn} r)}{dr} \right) \Big] \cos(m\alpha); \\
w^k &= -\frac{\partial}{\partial z} (-\bar{d}_4 \psi_1^k + \bar{d}_5 \psi_2^k + \bar{d}_6 \Phi^0) - \frac{1}{c_5} \frac{\partial \psi_0^k}{\partial \alpha} = \\
&= \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \left[(-\bar{d}_4 e^{-\mu_{mn}^j z} A_{1mn}^k + \bar{d}_4 e^{-\mu_{mn}^1 (z_{k-1}-z)} B_{1mn}^k + \bar{d}_5 e^{-\mu_{mn}^2 z} A_{2mn}^k - \bar{d}_5 e^{-\mu_{mn}^2 (z_{k-1}-z)} B_{2mn}^k + \right. \\
&\quad \left. + \bar{d}_6 e^{-\mu_{mn}^3 z} A_{31mn}^k - \bar{d}_6 e^{-\mu_{mn}^3 (z_{k-1}-z)} B_{3mn}^k) \right] \times \\
&\quad \times (N_m(\mu_{mn} r_0) J_m(\mu_{mn} r) - J_m(\mu_{mn} r_0) N_m(\mu_{mn} r)) \Big] \sin(m\alpha);
\end{aligned}$$

სადაც

$$\begin{aligned}
\bar{d}_1 &= \frac{a_2(2c_4 + g) + \gamma_6 - \gamma_3}{2c_4(\gamma_6 - \gamma_3)}, \quad \bar{d}_2 = \frac{2c_4 + g}{2c_4}, \\
\bar{d}_3 &= \frac{(2c_4 + g)(a_2\gamma_4 + a_3(\gamma_3 - \gamma_1)) + 2c_4\gamma_4(\gamma_6 - \gamma_1)}{2c_4(\gamma_6 - \gamma_1)(\gamma_3 - \gamma_1)}, \\
\bar{d}_4 &= \frac{a_2(2e_3\bar{a} - g - 2c_4) - \gamma_6 + \gamma_3}{2c_4(\gamma_6 - \gamma_3)}, \quad \bar{d}_5 = \frac{2e_3\bar{a} - g - 2c_4}{2c_4}, \\
\bar{d}_6 &= \frac{2a_2\gamma_4e_3 + 2a_3e_3(\gamma_3 - \gamma_1) + 2e_3(\gamma_6 - \gamma_1)(\gamma_3 - \gamma_1) - \gamma_4(\gamma_6 - \gamma_1)}{2c_4(\gamma_6 - \gamma_1)(\gamma_3 - \gamma_1)}.
\end{aligned}$$

$\psi_0^k, \psi_1^k, \psi_2^k, \varphi^k$ ფუნქციების საშუალებით შევადგინოთ გამოსახულებები N_z ,

$\Gamma_1 S_{zr}, S_{z\alpha}$ და $\Gamma_2 S_{zr}, S_{z\alpha}$ -თვის:

$$\begin{aligned}
N_z &= \bar{d}_7 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \bar{d}_8 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \bar{d}_9 \frac{\partial^2 \Phi^0}{\partial z^2} = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{d}_7 \mu_{mn}^1 e^{-\mu_{mn}^1 z} A_{1mn}^k + \bar{d}_7 \mu_{mn}^1 e^{-\mu_{mn}^1 z_{k-1} - z} B_{1mn}^k + \\
&+ \bar{d}_8 \mu_{mn}^2 e^{-\mu_{mn}^2 z} A_{2mn}^k + \bar{d}_8 \mu_{mn}^2 e^{-\mu_{mn}^2 z_{k-1} - z} B_{2mn}^k \\
&+ \bar{d}_9 \mu_{mn}^3 e^{-\mu_{mn}^3 z} A_{31mn}^k + \bar{d}_9 \mu_{mn}^3 e^{-\mu_{mn}^3 z_{k-1} - z} B_{3mn}^k \times \\
&\times \left(N_m \left(\mu_{mn} r_0 \right) J_m \left(\mu_{mn} r \right) - J_m \left(\mu_{mn} r_0 \right) N_m \left(\mu_{mn} r \right) \right) \cos m^{\alpha}, \\
\Gamma_1 \left(S_{z^r}, S_{z^{\alpha}} \right) &= - \frac{\partial \sigma}{\partial z} = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\bar{d}_7 \left(\mu_{mn}^1 \right)^2 e^{-\mu_{mn}^1 z} A_{1mn}^k - \bar{d}_7 \left(\mu_{mn}^1 \right)^2 e^{-\mu_{mn}^1 z_{k-1} - z} B_{1mn}^k - \right. \\
&- \bar{d}_8 \left(\mu_{mn}^2 \right)^2 e^{-\mu_{mn}^2 z} A_{2mn}^k - \bar{d}_8 \left(\mu_{mn}^2 \right)^2 e^{-\mu_{mn}^2 z_{k-1} - z} B_{2mn}^k \\
&- \left. \bar{d}_9 \left(\mu_{mn}^3 \right)^2 e^{-\mu_{mn}^3 z} A_{31mn}^k - \bar{d}_9 \left(\mu_{mn}^3 \right)^2 e^{-\mu_{mn}^3 z_{k-1} - z} B_{3mn}^k \right) \times \\
&\times \left(N_m \left(\mu_{mn} r_0 \right) J_m \left(\mu_{mn} r \right) - J_m \left(\mu_{mn} r_0 \right) N_m \left(\mu_{mn} r \right) \right) \cos m^{\alpha}, \\
\Gamma_2 \left(S_{z^r}, S_{z^{\alpha}} \right) &= c^2 \frac{\partial^2 \psi^k}{\partial z^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c^2 \left(\left(\mu_{mn}^0 \right)^3 e^{-\mu_{mn}^0 z} A_{0mn}^k - \left(\mu_{mn}^0 \right)^3 e^{-\mu_{mn}^0 z_{k-1} - z} B_{0mn}^k \right) \\
&\times \left(\frac{dN_m \left(\mu_{mn} r_0 \right)}{dr} J_m \left(\mu_{mn} r \right) - \frac{dJ_m \left(\mu_{mn} r_0 \right)}{dr} N_m \left(\mu_{mn} r \right) \right) \cos m^{\alpha},
\end{aligned}$$

სადაც

$$\begin{aligned}
\bar{d}_1 &= \frac{a_2 (2c_4 + g) + \gamma_6 - \gamma_3}{2c_4 (\gamma_6 - \gamma_3)}, \quad \bar{d}_2 = \frac{2c_4 + g}{2c_4}, \\
\bar{d}_3 &= \frac{(2c_4 + g)(a_2 \gamma_4 + a_3 (\gamma_3 - \gamma_1)) + 2c_4 \gamma_4 (\gamma_6 - \gamma_1)}{2c_4 (\gamma_6 - \gamma_1) (\gamma_3 - \gamma_1)}, \\
\bar{d}_4 &= \frac{a_2 (2e_3 \bar{a} - g - 2c_4) - \gamma_6 + \gamma_3}{2c_4 (\gamma_6 - \gamma_3)}, \quad \bar{d}_5 = \frac{2e_3 \bar{a} - g - 2c_4}{2c_4}, \\
\bar{d}_6 &= \frac{2a_2 \gamma_4 e_3 + 2a_3 e_3 (\gamma_3 - \gamma_1) + 2e_3 (\gamma_6 - \gamma_1) (\gamma_3 - \gamma_1) - \gamma_4 (\gamma_6 - \gamma_1)}{2c_4 (\gamma_6 - \gamma_1) (\gamma_3 - \gamma_1)}, \\
\bar{d}_7 &= \frac{a_2 (c_2 g - 2c_3 c_4 - 2c_3 e_3 \bar{a} - 2c_3 c_4 \gamma_3 - c_3 \gamma_3 g) + (c_2 - c_3 \gamma_3) (\gamma_6 - \gamma_3)}{2c_4 (\gamma_6 - \gamma_3)}, \\
\bar{d}_8 &= \frac{c_2 g - 2c_2 c_4 - 2c_3 e_3 a - c_3 \gamma_6 (2c_4 + g)}{2c_4},
\end{aligned}$$

$$d_9 = \frac{1}{2c_4 \gamma_3 - \gamma_1 \gamma_6 - \gamma_1} [a_2 \gamma_4 c_2 g - 2c_2 c_4 - 2c_3 e_3 a + 2c_3 c_4 \gamma_1 + c_3 \gamma_1 g + a_3 - 2c_2 e_3 g + 2c_2 e_3 \gamma_1 - 2c_3 c_4 a_3 \gamma_1 g \gamma_3 - \gamma_1 + c_2 - c_3 \gamma_1 \gamma_6 - \gamma_1 \gamma_4].$$

$$d_8 = \frac{c_2 g - 2c_2 c_4 - 2c_3 e_3 a - c_3 \gamma_6 2c_4 + g}{2c_4},$$

$$d_9 = \frac{1}{2c_4 \gamma_3 - \gamma_1 \gamma_6 - \gamma_1} [a_2 \gamma_4 c_2 g - 2c_2 c_4 - 2c_3 e_3 a + 2c_3 c_4 \gamma_1 + c_3 \gamma_1 g + a_3 - 2c_2 e_3 g + 2c_2 e_3 \gamma_1 - 2c_3 c_4 a_3 \gamma_1 g \gamma_3 - \gamma_1 + c_2 - c_3 \gamma_1 \gamma_6 - \gamma_1 \gamma_4].$$

ამის შემდეგ სასაზღვრო და საკონტაქტო ზედაპირებზე მოცემულ ფუნქციებს გავშლით ფურიე-ბესელის მწკრივებად და გავუტოლებთ სასაზღვრო და საკონტაქტო ზედაპირებზე მოცემულ შესაბამის გამოსახულებებს მუდმივების მიმართ მივიღებთ უსასრულო ალგებრულ განტოლებათა სისტემას კვაზიდიագონალური მატრიცით $6 -$ რიგის დიაგონალური ბლოკებით.

მუდმივების განსაზღვრის შემდეგ, რომ და წარმოებულების შესაბამის მწკრივები ექსპონენციალურად კრებადია არეში

$$\Omega = (r, \alpha, z) \in R : r_0 \leq r < r_1, 0 < \alpha < \alpha_1, 0 \leq z < z_1.$$

3.3. ღერძსიმეტრიული ამოცანა ფილისათვის

ვთქვათ, როცა

$$r = r_i : \sigma_z = f_{i1}, \tau_{ra} = f_{i2}, \tau_r = f_{i3}, \quad (3.58)$$

ხოლო გვერდით ზედაპირებზე მოცემულია სიმეტრიის ან ანტისიმეტრიის გაგრძელების პირობები ანუ გვერდით ზედაპირებზე მოცემულია შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$\text{როცა } \alpha = 0, \alpha_1 : \delta_1 N_\alpha + \gamma_1 v = 0, \delta_1 w + \gamma_1 S_{\alpha z} = 0, \delta_1 u + \gamma_1 S_{\alpha z} = 0; \quad (3.59)$$

$$\text{როცა } z = 0, z_1 : \delta_1 N_z + \gamma_1 w = 0, \delta_1 u + \gamma_1 S_{zr} = 0, \delta_1 v + \gamma_1 S_{z\alpha} = 0; \quad (3.60)$$

(3.58), (3.59), (3.60) ტოლობებში $i = 0$ ან 1 , ამასთან (3.59)-ში და (3.60)-ში

$$\delta_p = 1, \gamma_p = 0, \text{ ან } \delta_p = 0, \gamma_p = 1, p = 1, 2, 3, \text{ ხოლო } (3.58)\text{-ში } \delta_p \gamma_p = 0, \delta_p + \gamma_p = 1, p = 1, 2.$$

ელექტროსტატიკის და წონასწორობის განტოლებებს აქვთ შემდეგი სახე [1]:

$$\begin{aligned}
a) \quad & \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{r\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial z} + \frac{N_r - N_\alpha}{r} = 0, \\
b) \quad & \frac{\partial S_{\alpha r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial S_{\alpha z}}{\partial z} + \frac{2S_{r\alpha}}{r} = 0, \\
c) \quad & \frac{\partial S_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{z\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{S_{rz}}{r} = 0, \\
& \frac{1}{r} \frac{\partial (r D_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\alpha}{\partial z} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0,
\end{aligned} \tag{3.61}$$

სადაც N_r, N_α, N_z - ნორმალური, S_r, S_α, S_z - მხები ძაბვებია. D_r, D_α, D_z - ელექტრული ინდუქციის \vec{D} ვექტორის მდგენელებია საკოორდინატო წირების მხების გასწვრივ. პიეზოელექტრული გარემოსთვის მდგომარეობის განტოლებებს აქვთ შემდეგი სახე [1]:

$$\begin{aligned}
N_r &= c_1 \varepsilon_{rr} + (c_1 - 2c_5) \varepsilon_{\alpha\alpha} + c_3 \varepsilon_{zz} - e_1 E_z - \beta_{10} T = \\
&= c_1 \varepsilon_{rr} + (c_1 - 2c_5) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{u}{r} \right) + c_3 \frac{\partial w}{\partial z} + e_1 + \frac{\partial \phi}{\partial z} - \beta_{10} T, \\
N_\alpha &= (c_1 - 2c_5) \varepsilon_{rr} + c_1 \varepsilon_{\alpha\alpha} + c_3 \varepsilon_{zz} - e_1 E_z - \beta_{10} T = \\
&= c_1 \frac{\partial u}{\partial r} + (c_1 - 2c_5) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{u}{r} \right) + c_3 \frac{\partial w}{\partial z} + e_1 \frac{\partial \phi}{\partial z} - \beta_{10} T, \\
N_z &= c_3 (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\alpha\alpha}) + c_2 \varepsilon_{zz} - e_2 E_z - \beta_{20} T = \\
&= c_3 \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{u}{r} \right) + c_2 \frac{\partial w}{\partial z} - e_2 \frac{\partial \phi}{\partial z} - \beta_{20} T,
\end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned}
D_r &= e_3 \varepsilon_{rz} + \mathfrak{D}_1 E_r = e_3 \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \mathfrak{D}_1 \frac{\partial \phi}{\partial r}, \\
D_\alpha &= e_3 \varepsilon_{\alpha z} + \mathfrak{D}_1 E_\alpha = e_3 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \mathfrak{D}_1 \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}, \\
D_z &= e_1 (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\alpha\alpha}) + e_2 \varepsilon_{zz} + \mathfrak{D}_3 E_z = e_1 \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{1}{r} u \right) + e_2 \frac{\partial w}{\partial z} - \mathfrak{D}_3 \frac{\partial \phi}{\partial z}. \\
\vec{E} &= -grad \phi = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{i} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \vec{j} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k}, \\
E_r &= -\frac{\partial \phi}{\partial r}, E_\alpha = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}, E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{3.63}$$

სადაც $\varepsilon_r, \varepsilon_\alpha, \varepsilon_z$ - დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტებია, E_α, E_r, E_z - ელექტრული ველის ძაბვის ვექტორის კომპონენტებია $\vec{E} = -grad \phi$, სადაც ϕ - ელექტროსტატიკური პოტენციალია. $c_i (i = 1, 2, \dots, 5)$ - დრეკადი მახასიათებლებია, e_i - პიეზოელექტრული მუდმივებია. $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ - დიელექტრული მუდმივებია.

თუ სხეულის $c_i (i = 1, 2, \dots, 5)$ დრეკადი მახასიათებლებისთვის სრულდება პირობა

$$c_1 c_2 - (c_3 + 2c_4^2) = 0, \quad (3.64)$$

ამასთან ერთად ელექტროდრეკადი ველის კომპონენტები არ არიან α კოორდინატზე დამოკიდებული და $u(r, z), v \equiv 0, w = w(r, z)$ მაშინ $B \equiv 0, K \equiv 0, S_{r\alpha} \equiv 0, S_{\alpha z} \equiv 0, D_\alpha \equiv 0$ და (3.62), (3.63), ასეთი სახითაც შეგვიძლია ჩავწეროთ [78]:

$$N_r = c_1 \frac{\partial u}{\partial r} + (c_1 - 2c_5) \frac{1}{r} u + c_3 \frac{\partial w}{\partial z} + e_1 + \frac{\partial \phi}{\partial z},$$

$$N_\alpha = (c_1 - 2c_5) \frac{\partial u}{\partial r} + c_1 \frac{1}{r} u + c_3 \frac{\partial w}{\partial z} + e_1 \frac{\partial \phi}{\partial z},$$

$$N_z = c_3 \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} u \right) + c_2 \frac{\partial w}{\partial z} + e_3 \frac{\partial \phi}{\partial z},$$

$$S_{rz} = c_4 \varepsilon_{rz} - e_3 E_r = c_4 \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + e_3 \frac{\partial \phi}{\partial r},$$

$$D_r = e_3 \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \mathfrak{D}_1 \frac{\partial \phi}{\partial r};$$

$$D_z = e_1 \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} u \right) + e_z \frac{\partial w}{\partial z} - \mathfrak{D}_3 \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{1}{r} D_r + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{c_3}{c_1} \frac{\partial K}{\partial z} + \frac{c_1 c_2 - c_3^2}{c_1} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial (r \tau_{rz})}{\partial r} = - \frac{c_1 c_2 - c_3 e_1}{c_1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2},$$

$$r \frac{\partial K}{\partial r} + \frac{\partial (r \tau_{rz})}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{(r \tau_{z\alpha})}{\partial r} - \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial (r B_z)}{\partial z} = 0$$

$$K = c_1 \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} u \right) + c_2 \frac{\partial w}{\partial z} + e_1 \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

ამგვარად $\Omega = \{(r, \alpha, z) \in r_0 < r < r_1, \alpha_0 < \alpha < \alpha_1, z_0 < z < z_1\}$ არეში გვაქვს

ღერძსიმეტრიული დამაბულ დეფორმირებული მდგომარეობა შემდეგი სასაზღვრო პირობებით: $\Omega = (r, \alpha, z) \in R : r_0 \leq r < r_1, 0 \leq \alpha \leq \alpha_1, 0 \leq z \leq z_1$.

როცა $r = r_0$ ან $r = r_1$

$$N_z = f_{i1}, \quad S_{zr} = f_{i2}, \quad S_{z\alpha} = f_{i3}, \quad D_z = f_{i4},$$

როცა $\alpha = \alpha_0$ ან $\alpha = \alpha_1$

$$v = 0, \quad S_{z\alpha} = 0, \quad S_{zr} = 0, \quad D_\alpha = 0,$$

როცა $z = 0, z_1 : w=0, \quad S_{zr} = 0, \quad S_{z\alpha} = 0, \quad D_r = 0;$

დრეკადი ველის კომპონენტებისათვის გვაქვს [79]

$$u = \frac{\partial}{\partial r} \left(\psi_2 + \frac{1}{2c_4} \psi_1 \right) + \frac{1}{c_5} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha},$$

$$v = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\psi_2 + \frac{1}{2c_4} \psi_1 \right) - \frac{1}{c_5} \frac{\partial \psi_0}{\partial r},$$

$$w = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\psi_2 + \frac{1}{2c_4} \psi_1 \right) + \frac{1}{c_4} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \frac{e_3}{c_4} \frac{\partial \psi_0}{\partial r},$$

ჩვენი შემთხვევისათვის ψ_1, ψ_2 და ϕ ფუნქციებს აქვთ შემდეგი სახე

$$\psi_1 = \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \left[A_{1\bar{m}} e^{s_1(r-r_1)} + A_{2\bar{m}} e^{s_2(r_0-r)} \right] \sin(mz),$$

$$\psi_2 = \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \left[A_{3\bar{m}} e^{s_1(r-r_1)} + A_{4\bar{m}} e^{s_2(r_0-r)} \right] \sin(mz),$$

$$\phi = \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \left[A_{5\bar{m}} e^{s_1(r-r_1)} + A_{6\bar{m}} e^{s_2(r_0-r)} \right] \sin(mz),$$

სადაც $m = \frac{\pi \bar{m}}{z_1} \gamma, \quad \bar{m} = 0, 1, 2, \dots, \quad A_j = A_j(s, m)$ - საძიებელი სიდიდეებია.

ψ_1, ψ_2, ϕ ფუნქციებით, როცა $r = r_j$ შევადგინოთ გამოსახულებები $N_z, S_{z\alpha}, S_{zz}$ და გავუტოლოთ ისინი f_{i1}, f_{i2}, f_{i3} , გაშლილს ფურიეს მწკრივად (3.64)-ის გათვალისწინებით. ამის შედეგად $A_{1m}, A_{2m}, \dots, A_{6m}$ კოეფიციენტებისათვის ვღებულობთ უსასრულო ალგებრულ განტოლებათა სისტემას კვაზიდიანალური მატრიცით Λ დიანალური ბლოკებით Λ_p , რომლის დეტერმინანტი, როცა $p \rightarrow \infty$ -კენ, $\det \Lambda_p \neq 0$.

3.4. ფილისათვის ელემენტარულ ფუნქციებში ამოხსნადი

სასაზღვრო ამოცანების კლასი

ფილისათვის განვიხილოთ ისეთი სასაზღვრო ამოცანების კლასი, რომელთა ამონახსნები გამოისახებიან ელემენტარული ფუნქციებით. ამ ამოცანებში მონაწილეობენ ბესელის ფუნქციები [76], რომელთა ინდექსი ნახევარად მთელია ანუ ტოლია $s + \frac{1}{2}$, სადაც $s = 0, 1, 2, \dots$.

განვიხილოთ სექტორული ცილინდრული ფილის თერმოდრეკადი წონასწორობა, როცა $\alpha = 0$ საზღვარზე მოცემულია ერთ-ერთი (3.22') სასაზღვრო პირობათაგანი, ხოლო $\alpha = \alpha_1$ საზღვარზე კი - მეორე (იგულისხმება, რომ ფილაზე ელექტრული ველი არ მოქმედებს), ამასთან $\alpha_1 = \frac{\pi}{2k-1}$, სადაც $k = 1, 2, 3, \dots$. $r = r_1$ საზღვარზე მოცემულია (3.21) სასაზღვრო პირობებიდან ნებისმიერი. ამრიგად, გვაქვს სასაზღვრო ამოცანა: (3.52), (3.21), (3.22'), (3.22'). გავიხსენოთ, რომ ასეთი ტიპის ამოცანების ამოხსნა, როგორც ვნახეთ მარკუთხა ფილის შემთხვევაში მიიყვანება ორი სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნაზე. ჩვენს შემთხვევაში (3.52), (3.21), (3.22'), (3.22') სასაზღვრო ამოცანა დაიყვანება (3.52), (3.21), (3.22'), (3.22') და (3.52), (3.21), (3.22'), (3.22') ამოცანაზე. ამ ამოცანებს შესაბამისად პირველს ვუწოდეთ G_c ამოცანა, ხოლო მეორეს $-G_A$.

ყოველივე ამის შემდეგ, თითქმის ყველაფერი მეორდება ისევე, როგორც წინა პარაგრაფებში. \tilde{T} , Ψ_1 და Ψ_2 ფუნქციებისთვის გვექნება [80]:

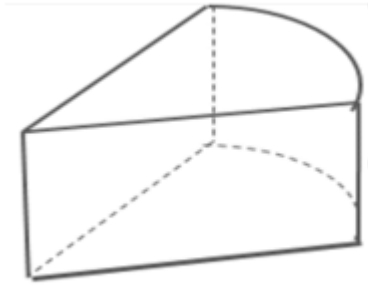
$$\Psi_1(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{1mn} e^{-\tilde{p}h} sh\tilde{p}z \cdot \sin\left[\frac{m\pi}{\alpha_1}\alpha\right] \Psi_{mn}(r),$$

$$\Psi_2(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{3mn} e^{-\tilde{p}h} sh\tilde{p}z \cdot \sin\left[\frac{m\pi}{\alpha_1}\alpha\right] \Psi_{mn}(r)$$

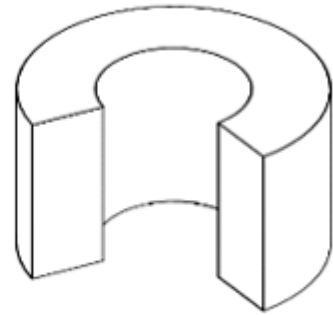
$$\tilde{T}(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{Tmn} e^{-\tilde{p}h} sh\tilde{p}z \cdot \sin\left[\frac{m\pi}{\alpha_1}\alpha\right] \tilde{T}_{mn}(r),$$

სადაც $s = 2km - m - k$; \tilde{p}_{mn} და p_{mn} შესაბამისი ტრანსცედენტული განტოლების n ნომრიანი ფესვებია. A_{1mn} , A_{2mn} , A_{3mn} მუდმივებია. როგორც ცნობილია, ნახევრადმთელ ინდექსიანი ბესელის ფუნქციებია შემდეგნაირად განისაზღვრებიან [77]:

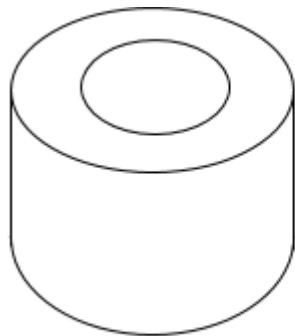
$A_{1mn}, A_{2mn}, \tilde{T}_{mn}$ კოეფიციენტების განსაზღვრის შემდეგ მტკიცდება, რომ მიღებული მწკრივები თანაბრად და აბსოლუტურად კრებადია $\bar{\Omega}$ არეში; ამგვარად ფილისათვის ამოხსნილია დასმული სასაზღვრო ამოცანა. უნდა აღინიშნოს ისიც, რომ შემოთავაზებული მეთოდით შესაძლებელი განხილული იყოს სასაზღვრო ამოცანები სხვადასხვა გეომეტრის ფილებისათვის.



ნახ. 11



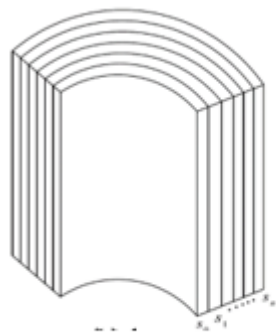
ნახ. 12



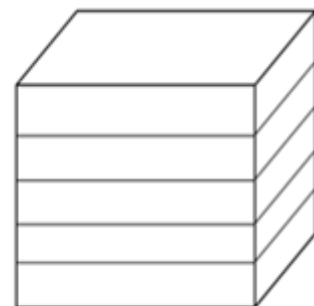
ნახ. 13



ნახ. 14



ნახ. 15



ნახ. 16

დასკვნები.

ნაშრომში სამგანზომილებიანი სასრული პიეზოკერამიკული ელემენტებისათვის მიღებული მათემატიკური მოდელი შესაძლებლობას იძლევა შესაბამისი სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების შესწავლის და ანალიზის მიზნით გამოყენებული იქნა თერმოდრეკადობის და ელექტროდრეკადობის თეორიის მეთოდები. დისერტაციაში ამ პრობლემების გადასაწყვეტად ამოხსნილია შემდეგი ძირითადი ამოცანები:

1. განზოგადებულ ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში, აგებულია მათემატიკური მოდელი პიეზოკერამიკული ფილისათვის, რომელიც შემოსაზღვრულია საკოორდინატო ზედაპირებით. პიეზოკერამიკულ ფილაზე მოქმედებს როგორც მექანიკური დატვირთვები, ასევე სტაციონალური ტემპერატურული და ელექტრული ველი. მათემატიკური მოდელს წარმოადგენს დივერგენტულ - როტორული სახით ჩაწერილი ლამეს განტოლებები ან ლამეს სისტემა შეცვლილია შერეული სისტემით.

2. მართკუთხა ფორმის პიეზოკერამიკული ფილისათვის მიღებულია მათემატიკური მოდელი. ფილის წახნაგებზე მოცემული სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო პირობები საშუალებას იძლევა ზუსტი ამოხსნების მიღებისა.

3. მიღებულია მოცემული სასაზღვრო პირობების შესაბამისი მოდიფიცირებული სასაზღვრო პირობები. დამტკიცებულია ამ პირობების ტოლფასობა. ამგვარად დასმული სასაზღვრო პირობები ამარტივებს შესაბამისი სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნას.

4. გეგმაში მართკუთხა პიეზოკერამიკული ფილისათვის მიღებულია განმსაზღვრელ განტოლებათა სისტემა.

5. ამოხსნილია თერმოდრეკადობის და ელექტროდრეკადობის თეორიის სასაზღვრო ამოცანები გეგმაში მართკუთხა ფორმის ფილისათვის.

6. შემოთავაზებული მეთოდით ამოხსნილია სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანები მრავალფენიანი ფილებისათვის. ყოველ ფილას შესაძლებელია ჰქონდეს თავისი ფიზიკური მუდმივები.

7. ცილინდრულ ფორმის ფილისათვის მიღებულია ძირითადი განტოლებები, სასაზღვრო პირობები ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში.
8. ღერძსიმეტრიული ამოცანა ფილისათვის.
9. ფილისათვის ელემენტარულ ფუნქციებში ამოხსნადი სასაზღვრო ამოცანათა კლასი.

ლიტერატურა

1. G. Lamé. Lecons sur la Theorie mathematique l'elasticite des corps solides, Paris: Bachelier, imprimeur-libraire, 1852, 670 p.
2. Fourier Joseph. Theorie analytique de la chaleur. Paris: Fimin Didot Pere et Fils, 1822, 639 p.
3. Мухелишвили Н. И. Некоторые задачи математической теории упругости. „Наука“, Москва, 1966, 650 с.
4. Подильчук Ю. Н. Трехмерные задачи теории упругости. Киев: „Наукова думка“, 1979, 239 с.
5. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. Москва.: ГИТТЛ, 1955, 491с.
6. Купрадзе В. Д., Геглия Т. Г., Башелеишвили М. О., Бурчуладзе Т.В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Москва: „Наука“, 1970, 637 с.
7. Колтунов М. А., Васильев Ю. Н., Черных В. А. Упругость и прочность цилиндрических тел. Москва: „Высшая школа“, 1975, 528 с.
8. Clifford Truesdell Linear Theories of Elasticity And Thermoelasticity. Berlin: Springer Heidelberg, 1984, 745 p.
9. Снеддон И.Н., Бери Д. С. Классическая теория упругости. Москва.: Физматлит, 1961, 218 с.
10. Новацкий В. Теория упругости. Москва: Мир, 1975, 872с.
11. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. „Наука“, Москва, 1970,

12. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Одна форма решения пространственных осесимметричных задач теории упругости при помощи функций комплексного переменного и решения этих задач для сферы. Прикл. математика и механика, 1962, 26, № 6. ;
13. Гузь О. М. Про один метод розв'язування тривимірних лінійних задач механіки суцільного середовища для неканонічних областей. Доп. АН УРСР. Сер. А. 1970. № 4,
14. Белоносов С. М. Основные плоские статические задачи теории упругости для односвязных и двухсвязных областей. Издат. сиб. отд. АН СССР, Новосибирск, 1962;
15. Duhamel Jean-Marie Konstan «Mémoire sur le calcul des actions moléculaire développées par les changements de température dans les corps solides .Mémoires présentées... par div. sav. à l'Ac ad. des sciences.» (T. V., 1838)
16. Neumann F.E. Die Geetze der Doppelbrechung des Lichtes in comprimierten oder ungleichförmig erwärmten uncrystallinischen Körpern // Abhandl. Konigl. Akad. Wissen. Berlin. – 1841. – № 2. – Teil. S. – 254.
17. Thomson William (Lord Kelvin). On a Universal Tendency in Nature to the Dissipation of Mechanical Energy. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh for April 19, 1852, also Philosophical Magazine, Oct. 1852, [This version from Mathematical and Physical Papers, vol. i, art. 59, pp. 511.]
18. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Теория упругости. 4-е изд., испр. Москва: Наука, 1987, 248с.
19. Biot M.A. Theory propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid I. Low-Frequency Range. / M.A. Biot. // J. Acoust. Soc. America. – 1956. V. 28. № 2. 168-178 pp
20. Nowacki J.L. Theory of Thermoelasticity with Applications. New-Ark, USA: Springer, 2011, 852 p.
21. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. Пер. с англ. под ред. Грилюка Э.И. Москва: Мир, 1964б, 517 с.
22. Лыков А.В. Теория теплопроводности. Москва: Высшая школа, 1967б. 599с.
23. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.осква: Наука, 1964 487с.

24. Шиллер Н. Н. О втором законе термодинамики и об одной новой его формулировке. Киев: “Университетские известия”, 1898.
25. Caratheodory C. Untersuchungen uber die Grundlagen der Thermodynamik. *Math. Ann.*, 1909. Vol. 67, pp 43-51.
26. Афанасьева – Эренфест Т.А. Необратимость, односторонность и второе начало термодинамики. *Журн. Прикладной физики*. 1928. Т.5, № 3, 4, с. 3 – 29.
27. В. Новацкий. Динамические задачи термоупругости. пер. с пол-го. Москва: Мир, 1970, 270с
28. Карнаухов В.Г. Связанные задачи термоупругости. Киев.: Науково думка, 1982, 260с.
29. Червинко О.П., Сенченков И.К., Доля Е.В. Расчет параметров тепловой неустойчивости слоистой призмы. *Теорет. и прикладная механика*. 2005, вып.40, с. 63 – 67.
30. Фильштинский Л.А., Сиренко Ю.В. Двумерные фундаментальные решения в связанной задаче термоупругости. *Теорет. и прикладная механика*, 2003. вып.37. с. 157 – 161.
31. Зазашвили Ш.П. Некоторые граничные задачи плоской теории термоупругости. Аннотация докл. семин. Ин-та прикл.матем. Тбилисского ун-та, 1971, с. 13-17.
32. Кахниашвили Н.С. Некоторые оценки в теории термоупругости. *Сообщ. АН Грузинской ССР*, 1972, 65, 3, с. 547-550.
33. Рухадзе Ж.А. Эффективное решение задач термоупругих колебаний для некоторых плоских областей. Труды Грузинского политехн. Ин-та, 5, 133, 1969, с. 164-171,
34. Папкович П.Ф. Выражение общего интеграла основных уравнений теории упругости через гармонические функции. Изв. АН СССР. Отделение математических и естественных наук. 1937, т.1, 2, с. 245 – 246.
35. Папкович П.Ф. Общий интеграл тепловых напряжений. Прикладная математика и механика. 1937, т.1, 2, с. 245 – 246.
36. Лебедев Н.Н. Температурные напряжения в теории упругости. Москва. – Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1937, 110с

37. Прусов И.А. Некоторые задачи термоупругости. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1972, 200с.
38. Узделов А.И. Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. Саратов: Изд-во СГУ, 1967, 167с.
39. Molotnikov V, Molotnikova A. Theory of Elasticity and Thermoelasticity. Berlin: Springer, 2018, 439p.
40. Калоев С.А., Антонов Ю.С. Термонапряженное состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами при действии линейного потока тепла и температуры на контурах. Теорет. и прикладная механика. 2005. вып. 40, с. 102 – 116.
41. Bera M.B., Mondal M.K., Mahapatra B.S., Roymahapatra G., Acharjya P.P. Generalized Theory of Thermoelasticity in Isotropic and Homogenous Solids. Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 2020, Vol.11 No.03, pp 1877-1885
42. Codarcea-Munteanu, L.F., Chirila, A.N., Marin, M.: Modeling fractional order strain in dipolar thermoelasticity. IFAC Papers OnLine 51(2), 601–606 (2018).
<https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.03.102>. უკანასკნელად გადამოწმებულია 26.5.2022
43. Илюшин А.А., Победра Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. Москва: Наука, 1970, 280с.
44. Карнаухов В.Г. Об исследованиях А.Д. Коваленко по термомеханике связанных полей в материалах и элементах конструкций и их дальнейшем развитии. *Прикладная механика*, 2005, 41, 9. с. 16 – 25с.
45. Карнаухов В.Г., Киричек И.Ф. Электротермовязкоупругость. Киев: Наук. думка, 1988, 328с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5-ти т.; Т.4).
46. Шевчук Ю.Н., Савченко Ю.Г. Термовязкопластичность. Киев: Наук. думка, 1988, 238с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5-ти т.; Т.4).
47. Шевченко Ю.Н. Термопластичность при переменных нагружениях. Киев: Наук. думка, 1970. – 287с.
48. Шевченко Ю.Н. Приближенные методы решения задач термопластичности при повторном нагружении. Прочность и пластичность, 1972, с. 383 – 391.
49. Шевченко Ю.Н. Об определяющих уравнениях теории пластического течения при неизотермических процессах нагружения. Тепловые нагружения в элементах конструкций. 1987, вып. 18, с. 17 – 23.

50. Кит Г.С., Кривцун М.Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1983, 280с.
51. Коваленко А.Д. Термоупругость. Киев: Вища. шк., 1975, 216с.
52. Коваленко А.Д. Особенности современной термоупругости. Прикладная механика. 1970,6, 4.с. 23 – 30.
53. Космодамианский А.С., Калоеров С.А. Температурные напряжения в многосвязанных пластинах. Донецк: Вища шк., 1983, 160с.
54. Лебедев Н.Н. Температурные напряжения в теории упругости. Москва–Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1937, 110с.
55. Прусов И.А. Некоторые задачи термоупругости. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1972, 200с.
56. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968, 887с.
57. Калоеров С.А., Антонов Ю.С. Термонапряженное состояние конечной многосвязанной анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами. Вышш. Донец. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. 2004,1.с. 103 – 110.
58. Калоеров С.А., Антонов Ю.С. Термонапряженное состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами. *Прикладная механика*. 2005, т.41,9, с. 127 – 136.
59. Купрадзе В. Д., Геглия Т. Г., Башелеишвили М. О., Бурчуладзе Т.В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Москва: „Наука“, 1970, 664 с
60. Хомасуридзе Н. Г. О граничных условиях типа линии симметрии и антисимметрии для оболочек. *Сообщения АН ГССР*, т. 60, №1, 1970, с. 43-47
61. Хомасуридзе Н. Г. О решении трехмерных граничных задач безмоментной и моментной теорий упругости. Труды Института прикладной математики ТГУ „Исследования некоторых уравнений математической физики“, 1972, с. 79-86.
62. Хомасуридзе Н. Г. Упругое равновесие многослойных плит классической и моментными теориями. Труды Всесоюз. совещ.-семинара по теории и числ.мет. расчета оболочек, т.2, 1984, с. 19-26.

63. Хомасуридзе Н. Г. Некоторые формы общих решений в теории упругости. Труды Института прикладной математики ТГУ „Исследования некоторых уравнений математической физики“, 1976, с. 50-63.

64. Хомасуридзе Н. Г., Горгидзе Д. А. Общие решения уравнений упругого равновесия для трансформных тел в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат. *Труды Грузинского политехнического института*, №9 (279), 1984, с. 35-39.;

65. Khomasuridze N. Thermoelastic equilibrium of bodies in generalized cylindrical coordinates. *Georgian Mathematical Journal*, 1998, v.5, №6, pp. 167-183.

66. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. Москва: „Наука“, 1986, 167 с.

67. Партон В. З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. Москва: „Наука“, 1988, 471 с.

68. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Электроупругость. Киев: Наукова думка, 1989, 270 с.

69. Горгидзе Д. А. Математические модели пьезокерамических элементов систем управления. Тбилиси: „Мецниереба“, 1989, 150 с.

70. Hutter K. van de Ven A. A. Field-matter interaction in thermoelastic solids. Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer-Verlag, 1978, 234p.

71. Zhen-Bang Kuang. Theory of Electroelasticity. Berlin Heidelberg: Shanghai Jiao Tong University Press, Shanghai and Springer-Verlag, 2014, 431p.

72. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость. Киев: Наук. думка, 1989. 279 с.

73. Tsaplev V., Konovalov R., Abbakumov K. Disk Bimorph-Type Piezoelectric Energy Harvester. *Journal of Power and Energy Engineering*, 2015, no. 3, pp. 63–68. 2015.

74. Бермант А. Ф. Отображения. Криволинейные координаты. Преобразования. Формулы Грина. Москва: Физматгиз, 1958, 324 с.

75. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. т.2. Москва: „Наука“, 1967, 297 с.

76. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. т.3. Москва: „Наука“, 1967, 310 с.

77. დ.გორგიძე, ლ. ქვარცხავა. ტრანსვერსალურად-იზოტროპული წრიული სქელი ფილის ღუნვის ამოცანა თერმული ველის გათვალისწინებით. გამოყენებითი მექანიკა, შრომათა კრებული, თბილისი, 2010, გვ.106-111;

78. Gorgidze D., Siradze Z., Ramishvili I., Qvarckhava L. Thermo-electroelasticity Equilibrium Transtropic Bodies in a Spherical Coordinate Sistem. Nova Publishers,2013 pp.165-176;

79. გორგიძე დ., გულუა ნ., ქვარცხავა ლ. ტრანსტროპული ელიფსური ცილინდრის თერმოდრეკადი წონასწორობა. Georgian Engineering News,2017,v.83,№ 3, გვ.5-9;

80. Кварцхава Л. Осесимметричное электроупругое равновесие цилиндрического тела. Georgian Engineering News, №2, 2020, გვ. 12-14.